ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES

POR

H. B. PHILLIPS

Profesor de Matemáticas en el Instituto Tecnológico de Massachusetts

Traducción al castellano por el
ING. TEODORO ORTIZ R.

UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO-AMERICANA
BUENOS AIRES, CARACAS, GUATEMALA, HABANA, LIMA, MONTEVIDEO, RIO DE JANEIRO, SANTIAGO
MEXICO

Esta obra es la traducción al castellano de la publicada originalmemte en inglés por John Wiley & Sons, Inc., de New York, N. Y., E. U. A., bajo el título de

DIFFERENTIAL EQUATIONS

COPYRIGHT 1945 BY "UTEHA"
(UNION TIPOGRAFICA EDITORIAL HISPANO - AMERICANA)
Queda hecho el registro y el depósito que determinan las respectivas leyes, en todos los países de lengua española. Reservados todos los derechos.

IMPRESO EN MEXICO
PRINTED IN MEXICO

Offset Hispano, S. de R. L. MATEO ALEMAN 8 — MEXICO, D. F.

PRÓLOGO DE LA TERCERA EDICIÓN

La presente edición ha sido revisada cuidadosamente, y atendiendo algunas sugestiones recibidas del campo de la enseñanza práctica, se han añadido algunas secciones nuevas y se ha aumentado el número de problemas, a fin de que se disponga de material suficiente para seleccionar problemas que se adapten a las necesidades individuales, y también para que se puedan variar los cursos de año en año. Muchos de estos problemas se los debo agradecer a mis compañeros en la enseñanza de las Matemáticas, y muy especialmente a los Profesores W. K. Lewis, T. B. Drew y Norbert Wiener.

H. B. PHILLIPS

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN

Este pequeño tratado de ecuaciones diferenciales ha sido redactado con la intención de facilitar al alumno la combinación del ejercicio formal que representa la solución de los tipos corrientes de ecuaciones diferenciales, con la práctica que da una habilidad perfecta para resolver los problemas de ecuaciones diferenciales que los mismos alumnos establezcan e integren. Para que el presente texto llene mejor este pro-

pósito hemos incluído breves nociones de Mecánica y de Física que consideramos necesarias para el planteo y la resolución de algunos problemas.

La recopilación de los problemas se ha hecho de muchas fuentes, entre las cuales el autor desea mencionar muy especialmente el "Advanced Calculus" por el Profesor E. B. Wilson y las notas sobre Matemáticas para Químicos redactadas por los profesores W. K. Lewis y F. L. Hitchcock.

H. B. PHILLIPS

INDICE

CAPÍTULO I

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON VARIABLES SEPARABLES

Artículo		Página
1.	Definiciones	1
2.	Soluciones de una ecuación diferencial	2
3.	Ecuaciones con variables separables	4
4.	Diferentes formas de la integral general	6
5.	Problemas geométricos	9
6.	Determinación de las constantes	13
7.	Ecuaciones que contienen integrales	16
8.	Problemas físicos	20
9.	Velocidad de variación	21
10.	Integración entre límites	22
11.	Ecuación de continuidad	25
12.	Salida de agua por un orificio	28
13.	Flujo de calor o electricidad. Difusión	29
14.	Problemas de segundo grado	33
15.	Relaciones diferenciales	38

CAPÍTULO II

OTRAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

16.	Ecuaciones diferenciales exactas	46
17.	Factores de integración	50
18.	Ecuaciones lineales	52
19.	Ecuaciones que pueden reducirse a lineales	57
20.	Ecuaciones homogéneas	60
21.	Ecuaciones que pueden convertirse en homogéneas	64
22.	Ecuaciones de grado superior al primero	67
23.	Interpretación geométrica	72
24.	Cambio de variable	75
25.	Ecuaciones simultáneas	77

CAPÍTULO III

TIPOS ESPECIALES DE ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

Artículo		Página
26.	Teoría general.	84
27.	Ecuaciones inmediatamente integrables	85
28.	Ecuaciones que no contienen y	86
29.	Ecuaciones que no contienen x	87
30.	Ecuaciones lineales de segundo orden	89
31.	Ecuaciones homogéneas	91
32.	Flechas de las vigas	94
33.	Equilibrio de un cable.	98
34.	Movimiento de un punto material sobre una recta	101
35.	Movimiento en un plano	104
36.	Dinámica de un sistema de puntos	111
37.	Sistema con masa variable	113

CAPÍTULO IV

ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

38.	Ecuaciones de orden n.	119
39.	Ecuaciones lineales con coeficientes constantes.	120
40.	Ecuaciones con el segundo miembro igual a cero	122
41.	Raíces imaginarias	120
42.	Ecuación en la que el segundo miembro es una función de x.	128
43.	Método de los coeficientes indeterminados	131
44.	Métodos simbólicos	137
45.	Método de variación de constantes	140
46.	Ecuaciones lineales homogéneas.	142
47.	Sistemas de ecuaciones lineales.	143
48.	Rotación alrededor de un eje fijo	146
49.	Movimientos vibratorios.	147
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS		156
ÍNDICE ALFABÉTICO		169

CAPITULO PRIMERO

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN CON VARIABLES SEPARABLES

1. Definiciones.—En muchas investigaciones es más fácil hallar relaciones entre las variaciones que sufren las variables que entre las mismas variables. Esas relaciones se expresan por medio de ecuaciones que contienen diferenciales o derivadas, a las que se da el nombre de ecuaciones diferenciales. Así,

$$(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0 \tag{1}$$

y

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2 \tag{2}$$

son ecuaciones diferenciales.

Si una ecuación diferencial contiene una sola variable independiente recibe el nombre de *ordinaria*. Las ecuaciones que anteceden son de esta clase. Si además contiene algunas derivadas parciales se denomina *ecuación diferencial entre derivadas parciales*. Así,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{3}$$

es una ecuación entre derivadas parciales.

Cuando una ecuación diferencial contiene únicamente las primeras derivadas, se dice que es de primer orden. En tér-

minos más generales, el *orden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más elevada que interviene en ella. Así (1) es una ecuación de primer orden, (2) y (3) son de segundo orden.

En esta obra sólo nos ocuparemos de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Las diversas magnitudes de cada problema serán funciones de una sola variable independiente, y, por tanto, no intervendrán derivadas parciales. En un problema de movimiento, por ejemplo, las variables son todas funciones del tiempo, y el problema se resuelve hallando esas variables en función del tiempo.

2. Soluciones de una ecuación diferencial.—Una solución o integral, de una ecuación diferencial es una función de las variables que en ella intervienen, cuyas diferenciales satisfacen a la ecuación dada.

Así, si c es una constante,

$$x^2 - xy = c, \tag{4}$$

es una solución de la ecuación

$$(2x - y)dx - x\,dy = 0, \tag{5}$$

pues diferenciando (4) se obtiene (5). Si hacemos variar a x e y de manera que satisfagan a la ecuación (4), ellas y sus diferenciales satisfacen a la (5). Puesto que la constante c puede tener un valor cualquiera, la ecuación diferencial tiene un número infinito de soluciones.

Considerando x e y como las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto en el plano, cada solución está representada por una curva. Así, la figura 1 muestra curvas que representan soluciones de la ecuación (5). Hay un número infinito de tales curvas. En este caso, por cada punto del plano pasa una curva. En casos más complicados puede haber varias curvas que pasen por el mismo punto.

Para resolver una ecuación diferencial de primer orden con dos variables la reduciremos siempre a la forma

$$du = 0,$$

en la que u es una función conocida de las variables. Así, en el ejemplo anterior si

$$u = x^2 - xy$$

hallamos

$$du = (2x - y)dx - x\,dy.$$

Con este valor de u, la ecuación (5) es, pues, equivalente a $du = 0$.

Si c es una constante cualquiera, al diferenciar se ve que

$$u = c$$

es una solución de

$$du = 0.$$

Para ver que toda solución de esta ecuación está representada por

$$u = c, \tag{6}$$

supongamos que

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

es una de estas soluciones, la cual viene representada por una curva.

En esa curva, u es una función de una sola variable, por ejemplo: la distancia a lo largo de la curva. Se demuestra por medio del cálculo que la única función de una sola variable cuya diferencial es igual a cero, es una constante. Por consiguiente, u es constante a lo largo de la curva. Esto es, todos los valores de x e y que satisfacen la ecuación (7) satisfacen

también una ecuación de la forma (6). En este sentido $u = c$ es la solución general de la ecuación $du = 0$, y se le llama *integral general* de la ecuación.

Resolvemos, pues, una ecuación diferencial integrando una diferencial. Por esta razón, a una solución se le suele llamar una *integral* de la ecuación diferencial, y las curvas que ellas representan se denominan *curvas integrales*.

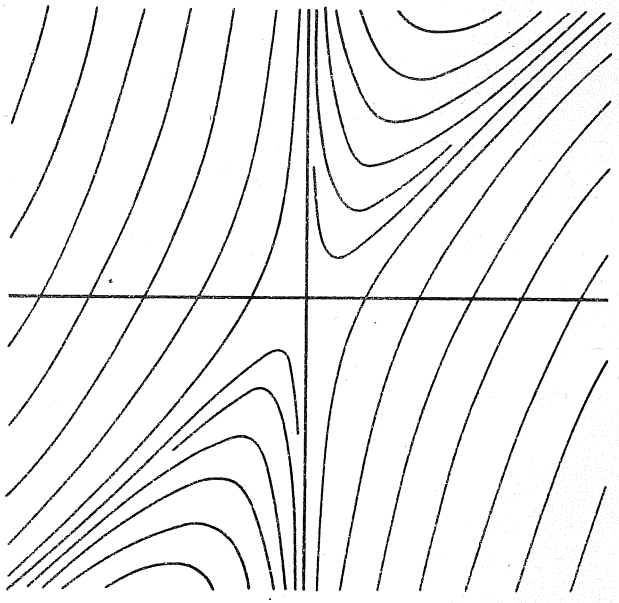

Fig. 1

3. **Ecuaciones con variables separables.**—Si una ecuación diferencial tiene la forma

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0,$$

en la que un solo término contiene x y dx y el otro y y dy, se dice que las variables están *separadas*. Cada término es una

diferencial exacta, y la ecuación entera tiene la forma $du = 0$, en la que

$$u = \int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy.$$

La integral general es, por consiguiente, $u = c$, esto es,

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = c,$$

en la que c es una constante arbitraria.

Puesto que las fórmulas de integración contienen únicamente una sola variable, si las variables no están separadas no podemos resolver la ecuación de esta manera sencilla. Así, si

$$x\,dy + (1 - y)dx = 0, \tag{8}$$

puesto que $x\,dy$ no puede integrarse, no podemos obtener una solución por integración directa. Sin embargo, por división podemos reducir esta ecuación a la forma

$$\frac{dy}{1 - y} + \frac{dx}{x} = 0$$

en la que las variables están separadas. La integral general es, pues,

$$-\ln(1 - y) + \ln x = c,$$

en la que ln representa el logaritmo de base e.

Cuando las variables pueden separarse de esta manera, se dice que la ecuación diferencial es de variables *separables*. Una ecuación de la forma

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

es separable cuando cada uno de los coeficientes M, N es una función de una sola variable o el producto de factores que contiene cada uno una sola variable.

4. Diferentes formas de la integral general. — La solución

$$\ln x - \ln (1 - y) = c \tag{8a}$$

puede escribirse

$$\ln \frac{x}{1 - y} = c,$$

de donde

$$\frac{x}{1 - y} = e^c = k.$$

Puesto que c es una constante arbitraria, k es también arbitraria. Podría usarse la letra c en lugar de k, y entonces la integral general podría escribirse

$$x = c(1 - y); \tag{8b}$$

Puesto que cualquier función de c es una constante, la solución puede expresarse bajo la forma

$$x = c(y - 1), \tag{8c}$$

$$y - 1 = cx, \tag{8d}$$

o sea

$$1 - y = cx. \tag{8e}$$

Las soluciones (8a), (8b), (8c), (8d) y (8e) son todas equivalentes y cualquiera de ellas puede considerarse como integral general de (8), pero claro está que la constante tiene un significado diferente en cada caso y, por tanto, no pueden usarse simultáneamente dos de ellas. El que la solución se obtenga de una forma u otra depende del método empleado para la resolución. Procediendo en forma adecuada puede obtenerse directamente una cualquiera de las soluciones anteriores. Así, si escribimos (8) en la forma

$$x\,dy - y\,dx + dx = 0$$

y dividimos por x^2, tenemos

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} + \frac{dx}{x^2} = 0.$$

El primer término es la diferencial de $\frac{y}{x}$. La integración directa da, pues,

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{x} = c,$$

o sea

$$y - 1 = cx,$$

que es (8d).

Al simplificar las soluciones se hace a menudo un uso intenso de los logaritmos. En este libro usamos el símbolo $\ln u$ para representar el logaritmo natural o logaritmo de base e. Según la definición de logaritmo

$$e^{\ln u} = u. \tag{9a}$$

Otras propiedades importantes se expresan por las ecuaciones

$$\ln e^u = u, \tag{9b}$$

$$\ln (uv) = \ln u + \ln v, \tag{9c}$$

$$\ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v, \tag{9d}$$

$$\frac{1}{n} \ln u = \ln u^{\frac{1}{n}}, \tag{9e}$$

$$\ln 1 = 0, \tag{9f}$$

$$\ln \frac{1}{v} = -\ln v. \tag{9g}$$

De la fórmula (9c) se deduce que la ecuación

$$\ln w = \ln u + \ln v$$

puede escribirse

$$w = uv.$$

Puesto que cualquier constante es el logaritmo de otra constante, es a menudo conveniente escribir $\ln c$ en lugar de c como constante de integración.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$(1 + x^2)\,dy - xy\,dx = 0.$$

Separando las variables esta ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{y} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0.$$

Integrando y designando por $\ln c$ la constante de integración,

$$\ln y - \tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) = \ln c.$$

Esto equivale a

$$\ln y = \ln \sqrt{1 + x^2} + \ln c,$$

y, por consiguiente,

$$y = c\sqrt{1 + x^2}.$$

La solución puede escribirse también

$$y^2 = c^2(1 + x^2),$$
$$y^2 = c\,(1 + x^2),$$

o sea

$$cy^2 = 1 + x^2.$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $(y^2 - 1)\,dx - (2y + xy)\,dy = 0.$
2. $x\sqrt{1 - y}\,dx - \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0.$

3. $y\,dx + (x + xy)\,dy = 0.$
4. $x\,dx + y\,dy = xy(x\,dy - y\,dx).$
5. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen}^2 y\,dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\,dy = 0.$
6. $\cos\theta\,dr - 2r \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 0.$
7. $2r\cos\theta\,dr - \operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0$
8. $r\sec\theta\,dr - 2a^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta = 0.$
9. $(1 - \operatorname{tg}^2\theta)\,dr + 2r \operatorname{tg}\theta\,d\theta = 0.$
10. $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0.$
11. $a\,dr - r\sqrt{r^2 - a^2}\,d\theta = 0.$
12. $(1 + x^2)\,dy + (1 + y^2)\,dx = 0.$
13. $\operatorname{tg} x \dfrac{dy}{dx} - 2y = a.$
14. $x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2.$
15. $r\dfrac{dr}{dx} = \sqrt{a^4 - r^4}.$
16. $e^{x-y}\,dx + e^{y-x}\,dy = 0.$
17. $e^y\left(\dfrac{dy}{dx} + 1\right) = 1.$

5. Problemas geométricos.—Ciertas magnitudes relacionadas con una curva, como la pendiente y el radio de curvatura se expresan en función de las derivadas. Una ecuación en la que intervienen esas magnitudes es, pues, una ecuación que contiene una derivada, esto es, la que hemos denominado ecuación diferencial.

Puede saberse, por ejemplo, que en cada punto (x, y) de una curva la pendiente es una función dada $f(x, y)$. La curva satisface entonces la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

cuya solución es la ecuación de la curva buscada. En general, la pendiente de la curva no se da directamente, sino que se conoce alguna propiedad de la misma que nos permite obtener una ecuación que relacione x, y y la pendiente de la curva en (x, y).

Ejemplo 1. Hallar las ecuaciones de las curvas tales que los segmentos de cada tangente comprendidos entre los ejes de coordenadas queden divididos en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Sea $P(x, y)$ un punto sobre la curva y MN la tangente en ese punto. El problema dice que MN queda dividido en dos partes iguales por el punto P. Por consiguiente, por la semejanza de triángulos,

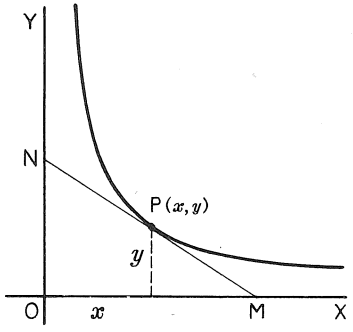

Fig. 2

$$OM = 2x, \quad ON = 2y.$$

Por definición $\frac{dy}{dx}$ es la pendiente de la tangente en (x, y). Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ON}{OM} = -\frac{y}{x},$$

usándose el signo negativo, porque en el dibujo la pendiente es negativa, en tanto, que x e y son positivas. Si se traza la tangente en otros cuadrantes x o y puede ser negativa, pero se verá que la ecuación diferencial anterior es siempre válida. Separando las variables, se obtiene,

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

y, por consiguiente, integrando

$$\ln x + \ln y = \ln c,$$

o sea

$$xy = c,$$

que es la ecuación de las curvas que se buscaban.

Ejemplo 2. Sabiendo que la normal en cada punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles cuya base está en el eje de las x, hallar la ecuación de la curva.

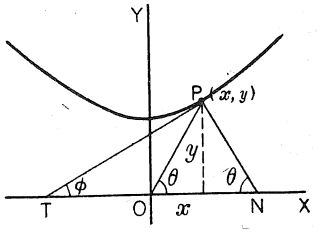

Fig. 3

Sea $P(x, y)$ un punto sobre la curva, PT la tangente y PN la normal a la curva en ese punto. El triángulo OPN es isósceles, con ángulos iguales en O y N. El triángulo TPN es un triángulo rectángulo, y por consiguiente ϕ y θ son complementarios. La pendiente de la tangente es, pues,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \phi = \operatorname{ctg} \theta.$$

Pero

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{x}{y},$$

Por consiguiente,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

$$y\,dy - x\,dx = 0,$$

$$y^2 - x^2 = c.$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la curva que corta a las parábolas

$$y^2 = 4px \qquad (a)$$

en ángulos rectos, para todos los valores de p. Esas curvas se llaman *trayectorias ortogonales* del sistema de parábolas.

Diferenciando (a) con respecto a x, se obtiene

$$2y\frac{dy}{dx} = 4p,$$

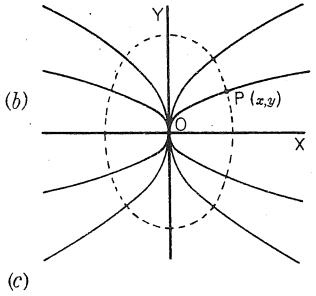

Fig. 4

de donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y}. \qquad (b)$$

Pero, de (a) se deduce

$$p = \frac{y^2}{4x}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (b), y efectuando operaciones, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}. \qquad (c)$$

Esta es la pendiente de la parábola en el punto (x, y). Una curva que corta ortogonalmente a la parábola, pasando por este mismo punto (fig. 4) tiene una pendiente igual a la recíproca negativa de ésta. Considerando x, y como las coordenadenados de un punto variable de la curva ortogonal, tienen pues que satisfacer la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}. \qquad (d)$$

Separando las variables, tenemos

$$y\,dy = -2x\,dx,$$

de donde

$$y^2 + 2x^2 = c.$$

Que representa la ecuación de una familia de elipses, que son las trayectorias ortogonales de las parábolas dadas.

Tal vez parezca extraño que x e y tengan los mismos valores en (c) y (d) en tanto que las derivadas tienen valores distintos. En un punto de intersección las coordenadas x, y tienen los mismos valores sobre las dos curvas; pero en los demás puntos x e y no son iguales de modo que las derivadas en (x, y) son diferentes.

Fué necesario eliminar p antes de integrar, pues si bien p es constante a lo largo de las parábolas no lo es a lo largo de la elipse ortogonal.

6. Determinación de las constantes.—Puesto que las constantes pueden tener un valor cualquiera, hay un número infinito de soluciones de una ecuación diferencial dada. En un problema real suelen darse de ordinario otros datos mediante los cuales es posible determinar la constante y obtenerse así una solución definida.

Así, por ejemplo, uno de los datos más frecuentes es el de saberse que la curva pasa por un punto determinado. En este caso sustituyendo las coordenadas de ese punto, se determina el valor de la constante. En algunos casos la ecuación diferencial contiene una constante desconocida. Así, la ecuación puede ser

$$\frac{dy}{dx} = kf(x, y),$$

en la que $f(x, y)$ es una función conocida. Si la curva pasa por dos puntos conocidos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pueden hallarse c y k sustituyendo ese par de valores.

El enunciado de un problema suele constar, pues, de dos partes. *Una parte contiene condiciones que son ciertas en todos*

los puntos de la curva. Partiendo de éstas se obtiene la ecuación diferencial. La segunda parte contiene condiciones que sólo son ciertas para determinados puntos. Estas se usan después de la integración para determinar las constantes.

Ejemplo. La normal en el punto $P(x, y)$ de una curva corta al eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar su ecuación sabiendo que pasa por el punto (2, 1) y que el punto M es el punto medio de PN.

Sea, en la figura 5, un punto $P(x, y)$ sobre la curva, sea PT la tangente, y PN la normal que corta el eje de las x en M. Puesto que M es el punto medio de PN, los triángulos rectángulos ONM y MRP son iguales. Por consiguiente,

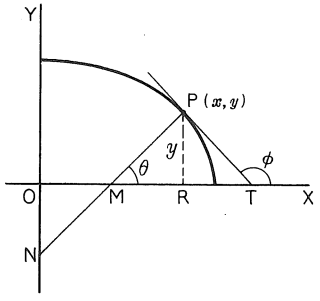

Fig. 5

$$OM = MR = \frac{x}{2}.$$

La pendiente de PT es, pues,

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \phi = -\operatorname{ctg} \theta = -\frac{x}{2y}.$$

Esto nos da

$$2y\,dy + x\,dx = 0,$$
$$2y^2 + x^2 = c.$$

Puesto que la curva pasa por el punto (2, 1), las coordenadas de este punto tienen que satisfacer la ecuación de la curva. En consecuencia, $c = 6$, y la ecuación de la curva a que se refiere el enunciado es

$$2y^2 + x^2 = 6.$$

PROBLEMAS

18. Hallar la ecuación de las curvas tales que la parte de cada tangente comprendida entre el eje de las y y el punto de tangencia, queda dividido en dos partes iguales por el eje de las x.

19. Hallar la ecuación de las curvas tales que la parte de cada tangente comprendida entre el eje de las x y el punto de tangencia esté dividido en dos partes iguales por el eje de las y.

20. La normal en el punto $P(x, y)$ de una curva corta al eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas para las cuales N es el punto medio de PM.

21. La normal en el punto $P(x, y)$ de una curva corta al eje de las x en M y al eje de las y en N. Hallar la ecuación de las curvas para las cuales P es el punto medio de MN.

22. Las normales en todos los puntos de una curva pasan por un punto fijo. Hallar la ecuación de la curva.

23. La tangente en cada punto de una curva y la recta que une ese punto con el origen forman un triángulo isósceles con base en el eje de las x. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (2, 2).

24. Hallar la ecuación de una curva tal, que si en un punto cualquiera de ella se trazan la normal y la ordenada, el segmento que ambas interceptan sobre el eje de las x, es una constante a.

25. El eje de las x y la tangente y la ordenada en cada punto de una curva forman un triángulo de área constante k. Hallar la ecuación de la curva, obteniendo los valores correspondientes de k y de la constante de integración suponiendo que pasa por los puntos (0, 4) y (1, 2).

26. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 2) y tal que la tangente en un punto cualquiera P y la recta que une este punto con el origen determinan ángulos complementarios con el eje de las x.

27. La parte de la normal comprendida entre el punto $P(x, y)$ de una curva y el eje de las x tiene tiene una longitud constante k. Hallar la ecuación de la curva.

28. Hallar las trayectorias ortogonales del haz de curvas

$$x^2y = k.$$

29. Hallar la curva que pasa por el punto (1, 1) y corta a las hipérbolas

$$x^2 - y^2 = a^2$$

en ángulo recto para todos los valores de a.

30. Hallar la curva que pasa por el punto (1, 1) y corta a las parábolas semicúbicas

$$y^2 = kx^2$$

en ángulos rectos para todos los valores de k.

31. Utilizando coordenadas polares, hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $r = a$, $\theta = 0$ y corta a todas las rectas que pasan por el origen bajo un mismo ángulo α.

32. Un cuerpo que parte con una velocidad horizontal v_0 y resbala siguiendo una trayectoria curva, tiene una velocidad

$$v = \sqrt{2gh + v_0^2}$$

cuando se encuentra a la distancia vertical h del punto de partida. Hallar la ecuación de la curva sobre la cual se mueve si la componente horizontal de la velocidad es constante.

7. Ecuaciones que contienen integrales.—En algunos casos la variable que interviene en el problema aparece bajo el signo integral con límites variables. En este caso la ecuación puede reducirse a una ecuación diferencial mediante una diferenciación, con la cual se suprime el signo integral. Así, la ecuación

$$A = \int_a^x f(x)\,dx\,,$$

en la que a es una constante, se transforma en

$$\frac{dA}{dx} = f(x)\,,$$

y si

$$A = \int_x^a f(x)\,dx\,,$$

$$\frac{dA}{dx} = -f(x).$$

La supresión de las integrales por diferenciación, como la supresión de los radicales elevando a potencias, puede introducir soluciones extrañas. La solución debe, pues, comprobarse sustituyéndola en la ecuación para ver si reune las condiciones exigidas.

Ejemplo. Hallar la ecuación de una curva tal que el área limitada por el eje de las x, un arco de la curva, una ordenada fija, y una ordenada variable sea proporcional al arco comprendido entre esas ordenadas.

Sea PQ, figura 6, un arco de la curva buscada. El área comprendida entre el arco y el eje de las x es

$$\int_a^x y\,dx$$

y la longitud del arco es

$$\int_a^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

Si el área y el arco son proporcionales

$$\int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = k\int_a^x y\,dx\,. \qquad (a)$$

Diferenciando con respecto a x hallamos

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = ky\,. \qquad (b)$$

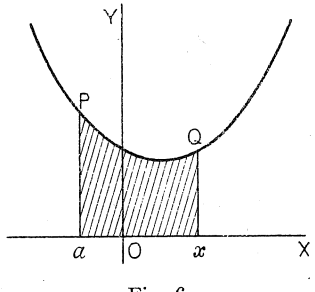

Fig. 6

de donde

$$dy = \sqrt{k^2y^2 - 1}\,dx\,. \qquad (c)$$

Separando las variables

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2y^2 - 1}} = dx\,. \qquad (d)$$

Integrando se obtiene

$$\ln\,(ky + \sqrt{k^2y^2 - 1}) = kx + \ln c\,,$$

de donde

$$ky + \sqrt{k^2y^2 - 1} = ce^{kx}.$$

Despejando el valor de y, tenemos

$$y = \frac{1}{2k}\left[ce^{kx} + \frac{1}{c}e^{-kx}\right]. \qquad (e)$$

Es evidente que esta solución satisface las condiciones, pues (e) tiene que conducir a (b), siendo la solución de la ecuación, y de (b) deducimos (a) integrando entre los límites.

Reemplazando k por $\frac{1}{k}$ y c por $e^{\frac{c}{k}}$, la ecuación (e) se convierte en

$$y = \frac{k}{2}\left[e^{\frac{x+c}{k}} + e^{-\frac{x+c}{k}}\right],$$

que es la forma corriente de la ecuación de la catenaria.

Si el factor $\sqrt{k^2y^2 - 1}$ es cero, la división mediante la cual pasamos de la ecuación (c) a la (d) no puede hacerse. Por tanto, además de resolver la ecuación (d), tenemos que investigar si

$$\sqrt{k^2y^2 - 1} = 0$$

es una solución del problema. Despejando el valor de y, tenemos

$$y = \pm\frac{1}{k}, \qquad (f)$$

que satisface las condiciones dadas, ya que sustituyendo en (a) se tiene la identidad

$$\int_a^x dx = \int_a^x dx.$$

Así, pues, la solución completa de un problema se compone de dos partes: la solución general (e) que representa una familia de curvas y la solución (f) que no contiene ninguna constante arbitraria. En este caso las dos soluciones son distintas, pues (f) no puede deducirse de (e) asignando un valor definido a la contante c. En muchos casos no son distintas, y, en muchos otros, al igualar el factor divisor a cero no se obtiene una solución del problema. Pero siempre que una ecuación diferencial se divide por un factor que contiene la variable, existe la posibilidad de perder una solución.

PROBLEMAS

33. Hallar la ecuación de una curva tal que el área comprendida entre la curva, el eje de las x, una ordenada fija y una ordenada variable, sea proporcional a la diferencia entre esas ordenadas.

34. El área del sector formado por un arco de una curva y los dos radios que van desde el origen a sus extremos, es proporcional a la diferencia de esos radios. Hallar la ecuación de la curva.

35. El área limitada por $y = 0$, $y = f(x)$, una ordenada fija y una ordenada variable, es proporcional a la diferencia entre las abscisas correspondientes. Hallar $f(x)$.

36. Para leer directamente las longitudes de onda, la placa de un condensador variable está adaptada de manera que el área del sector comprendido entre un radio variable y la línea $\theta = 0$ es proporcional al cuadrado de θ. Hallar la ecuación de la curva formada por el borde de la placa.

37. Hallar la ecuación de las curvas con arco proporcional al ángulo subtendido en el origen.

38. El arco de una curva es proporcional a la diferencia de los radios trazados desde el origen a sus extremos. Hallar la ecuación de la curva.

39. El área del sector formado por un arco de una curva y los radios que van desde el origen a sus extremos es proporcional al arco. Hallar la ecuación de la curva.

40. El área limitada por $y = f(x)$, el eje de las x, y dos ordenadas es igual al producto de las ordenadas. Comprobar que $f(x) = 0$ es la única solución.

41. El área limitada por el eje de las x, una curva y dos ordenadas es igual al valor medio de las ordenadas multiplicado por la distancia entre ellas. Hallar la ecuación de la curva.

42. Por cada punto de una curva se trazan paralelas a los ejes para formar un rectángulo con dos lados sobre los ejes. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que cada rectángulo de esta clase queda dividido en dos partes cuyas áreas son el doble una de la otra.

43. Por cada punto de una curva se trazan líneas paralelas a los ejes para formar un rectángulo con dos lados sobre los ejes. La curva divide cada rectángulo de esta clase en dos áreas que, cuando se las hace girar alrededor del eje de las y, engendran volúmenes iguales. Hallar la ecuación de la curva.

44. En una superficie de revolución se corta una zona por medio de dos planos perpendiculares a sus ejes. Hallar la ecuación de esta superficie sabiendo que el área de esa zona es proporcional a la distancia entre los planos.

8. Problemas físicos.—El primer paso para la resolución de un problema es determinar cuáles son las cantidades variables importantes y representarlas por letras. Luego se obtiene la ecuación diferencial expresando las relaciones entre las variables y sus diferenciales.

Hay que tener presente a este respecto que los símbolos representan valores correspondientes, y esto debe indicarse al definir cada letra. Así, si conocemos la velocidad de un punto que se mueve en función del tiempo, no conseguiremos nada escribiendo: "Sea v la velocidad". La velocidad puede tener muchos valores. El enunciado debe decir: "Sea v la velocidad *en el tiempo* t". Pero si el punto se mueve sobre una línea vertical y se conoce su velocidad en función de la altura, esta última declaración puede ser de muy poca utilidad. En este caso puede ser preferible tomar v como la velocidad a la altura h.

El que la solución de un problema sea sencilla o complicada depende más de la elección de las variables que de ninguna otra cosa. Así, supongamos que se toman x, y como variables y que después de resolver una complicada ecuación diferencial hallamos

$$u(x, y) = c$$

como solución. Si hubiéramos elegido u como una de las variables la ecuación diferencial hubiera sido

$$du = 0,$$

cuya solución es obvia.

Aunque no existan reglas generales aplicables a todos los casos, las cantidades que aparecen de una manera natural y prominente en el enunciado del problema se verá a menudo que son variables convenientes.

9. Velocidad de variación.—Cuando una cantidad x varía con el tiempo, la velocidad con que lo hace se representa por medio de la derivada

$$\frac{dx}{dt},$$

en la que t es el tiempo. Si por las condiciones del problema esta velocidad de variación puede expresarse bajo la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{10}$$

la cantidad x puede hallarse como una función del tiempo resolviendo esta ecuación diferencial.

Al establecer una ecuación diferencial es a menudo más conveniente trabajar con diferenciales. A este fin *puede considerarse* dx *como la variación de* x *durante el tiempo* dt *si el proceso continuara durante ese intervalo a la velocidad que tiene en el momento* t. Esto da la ecuación diferencial en la forma

$$dx = f(x, t)\, dt, \tag{11}$$

equivalente a (10).

Ejemplo. Se coloca la suma de \$100 a interés del 5 °/₀ anual con la condición de que los intereses podrán sumarse al capital en cualquier momento. ¿Cuántos años se necesitarán para que la cantidad colocada sume \$200?

Sea A la cantidad (capital e intereses) al cabo de t años. Cualquier aumento se debe por completo a la acumulación de los intereses. Si esta acumulación continuara a

una velocidad constante durante dt años los intereses sumarían

$$dA = 0{,}05\, A\, dt,$$

de donde

$$\frac{dA}{A} = 0{,}05\, dt.$$

Integrando, tenemos

$$\ln A = 0{,}05t + c.$$

Al principio, $A = 100$, $t = 0$, y, por consiguiente,

$$c = \ln 100.$$

Los valores finales $A = 200$, $t = t$, dan

$$\ln 200 = 0{,}05t + \ln 100,$$

$$t = \frac{1}{0{,}05} \ln \frac{200}{100} = \frac{1}{0{,}05} \ln 2 = 13{,}9 \text{ años}.$$

10. Integración entre límites.—En lugar de introducir constantes de integración y determinar sus valores por sustitución, puede con frecuencia acortarse el procedimiento integrando entre ciertos límites. Si $x = x_0$, $t = t_0$ y $x = x_1$, $t = t_1$ son pares de valores correspondientes de x, t, una ecuación de la forma

$$f_1(x)\, dx = f_2(t)\, dt$$

conduce en seguida a

$$\int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\, dx = \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)\, dt\,.$$

En este caso, no se introduce ninguna constante de integración porque una integral definida es un límite de una suma de diferenciales, y puesto que las diferenciales $f_1(x)\, dx$ y $f_2(t)\, dt$ son siempre iguales, sus sumas son iguales.

Es importante observar que *los límites inferiores de las integrales son valores correspondientes de* x *y* t, *y lo propio puede decirse de los límites superiores.*

Ejemplo. El radio se descompone con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si en 1600 años desaparece la mitad de la cantidad inicial, hallar la cantidad perdida en 100 años.

Sea R_0 la cantidad de radio al principio, y R la cantidad al cabo del tiempo t. La velocidad de descomposición es $-\frac{dR}{dt}$. Puesto que esta cantidad es proporcional a R,

$$\frac{dR}{dt} = -\, kR,$$

en la que k es una constante. Por consiguiente

$$\frac{dR}{R} = -\, k\, dt. \qquad (a)$$

La integración entre los límites $R = R_0$, $t = 0$ y $R = \frac{1}{2} R_0$, $t = 1600$, da

$$\int_{R_0}^{\frac{1}{2}R_0} \frac{dR}{R} = -\, k \int_0^{1600} dt,$$

$$\ln \tfrac{1}{2} = -\, 1600\, k,$$

$$k = \frac{\ln 2}{1600}.$$

Sustituyendo este valor en (a) e integrando entre los límites $R = R_0$, $t = 0$ y $R = R$, $t = 100$, tenemos, pues,

$$\int_{R_0}^{R} \frac{dR}{R} = -\, \frac{\ln 2}{1600} \int_0^{100} dt,$$

$$\ln \frac{R}{R_0} = -\, \frac{\ln 2}{1600} \cdot 100 = -\, 0{,}0433,$$

que da

$$\frac{R}{R_0} = 0{,}958.$$

Este resultado indica que al cabo de 100 años queda el 95,8 por 100 y que, por lo tanto, se ha perdido el 4,2 por 100.

PROBLEMAS

45. En un cultivo de levadura la cantidad de fermento activo aumenta con una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si esa cantidad se dobla en una hora, ¿qué cantidad habrá al cabo de $3\frac{1}{2}$ horas?

46. Una superficie electrizada se descarga por efecto de las pérdidas con una velocidad proporcional a la carga. Hallar la carga en función del tiempo.

47. Supongamos que una gota de líquido se evapora con una velocidad proporcional a la superficie. Hallar el radio de la gota en función del tiempo.

48. Según la ley de Newton la velocidad con que se enfría una sustancia en el aire es proporcional a la diferencia de la temperatura de la sustancia con respecto al aire. Si la temperatura del aire es 20° C. y la sustancia se enfría de 100° a 60° en 30 minutos, ¿cuándo llegará la temperatura a 40°?

49. En un proceso químico una sustancia se transforma en otra con una velocidad proporcional a la cantidad de la sustancia que queda sin transformar. Si al cabo de 1 hora esa cantidad es 48 y al cabo de 3 horas es 27, hallar la cantidad que había al principio.

50. Un tanque vertical tiene una pequeña fuga en el fondo. Suponiendo que el agua escape con una rapidez proporcional a la presión y que durante el primer día se escapa el 5 °/₀, ¿cuál será el tiempo necesario para que se vacie la mitad del depósito?

51. La población de cierta ciudad aumenta proporcionalmente a la misma. Si en 40 años aumenta de 40,000 a 90,000, ¿cuál será su población al cabo de 60 años?

52. ¿Qué tasa de interés pagadera anualmente equivale al 5 °/₀ de interés continuo?

53. Suponiendo que un hombre gana $2 por día además de sus gastos y que los invierta al 6 °/₀ de interés continuo, ¿a cuánto ascenderán sus ahorros al cabo de 25 años? Supóngase después que no hay años bisiestos y que en vez de depositar los $2 diariamente se invierten $ 720 al año también a interés continuo. Demostrar que el resultado así obtenido es intermedio entre el que se obtendría invirtiendo los $ 2 al comienzo de cada día y el que resultaría invirtiéndolos al final de cada día, y que no difiere de ninguno de los dos en más del interés de $2 durante los 25 años.

54. ¿Qué suma sería necesaria, suponiendo que se colocara al 6 °/₀ de interés continuo, para proporcionar una renta de $ 5 diarios durante 25 años, agotándose el principal al finalizar este plazo?

55. Peter Minuit compró en 1626 unos terrenos a los indios por $ 24 en el sitio que hoy ocupa la ciudad de New York. Estas mismas propiedades se valuaron, según el censo de 1933, en $1{,}9 \times 10^{10}$, o sea 19 mil millones de dólares. ¿Qué tasa de interés continuo hubiera producido este aumento de capital en el tiempo transcurrido?

11. Ecuación de continuidad. — En un proceso físico puede estar presente un elemento que ni se crea ni se destruye. La cantidad de este elemento en una región dada varía únicamente cuando cierta cantidad del mismo entra o sale cruzando los límites de la región considerada. En tal caso la igualdad evidente

$$\text{aumento} = \text{entradas} - \text{salidas}$$

se denomina a veces *ecuación de continuidad*. Expuesta en forma diferencial, puede dar lugar a una ecuación diferencial por medio de la cual puede determinarse la variación del elemento de que se trata.

En el caso de una distribución continua la *concentración* de una sustancia determinada es la cantidad de la misma en la unidad de volumen. Si la concentración es uniforme, la cantidad en el volumen v es cv.

Ejemplo. En un tanque hay 378,5 litros de salmuera que contienen 23 Kg de sal disuelta. Entra el agua en el tanque a razón de 11,5 litros por minuto y la mezcla sale en igual cantidad, manteniéndose uniforme la concentración agitando

el líquido. ¿Qué cantidad de sal queda en el tanque al cabo de una hora?

Sea x el número de kilos de sal que hay en el tanque al cabo de t minutos. La concentración es, pues,

$$c = \frac{x}{378,5} \text{ kilogramos por litro.}$$

En el tiempo dt, entran $11,5\ dt$ litros de agua y salen $11,5\ dt$ litros de salmuera que contienen $11,5\ cdt$ kilos de sal. Por consiguiente, la cantidad de sal que hay en el tanque es

$$dx = -11,5\ cdt = -\frac{11,5\,x}{378,5}\,dt.$$

La cantidad de sal al cabo de 1 hora se determina, pues, por la ecuación

$$\int_{23}^{x} \frac{dx}{x} = -\frac{11.5}{378,5}\int_{0}^{60} dt,$$

de donde

$$\ln \frac{x}{23} = -1,8$$

$$x = 3,80 \text{ Kg.}$$

PROBLEMAS

56 En un tanque de 378,5 litros de cabida va entrando salmuera, que contiene 240 gramos de sal por litro, a razón de 11,35 litros por minuto mezclándose con el agua dulce y limpia que llena el tanque, al mismo tiempo que va saliendo una cantidad igual de la mezcla por minuto. Hallar la cantidad de sal que hay en el tanque al cabo de 1 hora.

57. En un tanque hay 757 litros de solución saturada de sal (360 gramos por litro) y hay que diluirla añadiéndole salmuera que contiene 120 gramos de sal por litro. Si esta solución entra en el tanque a razón de 15,14 litros por minuto y la mezcla sale en igual cantidad, ¿al cabo de cuánto tiempo la concentración en el tanque será de 211 gramos de sal por litro?

58. En un tanque hay 378,5 litros de salmuera que contienen 34 Kg de sal disuelta. Entra agua en el tanque a razón de 11,35 litros por minuto y la mezcla sale a razón de 7,57 litros por minuto, manteniéndose la concentración uniforme agitando el líquido. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque al cabo de $1\frac{1}{2}$ horas?

59. Supongamos en el problema anterior que el fondo del tanque está cubierto por una mezcla de sal y de un material insoluble. Supongamos que la sal se disuelve con una rapidez proporcional a la diferencia entre la concentración de la solución y la de una solución saturada (360 gramos por litro) y que si el agua fuera dulce se disolverían 0,454 Kg de sal por minuto. ¿Qué sal habrá en la solución al cabo de $1\frac{1}{2}$ horas?

60. En un frasco de un litro entra oxígeno por un tubo y por otro se escapa la mezcla de oxígeno y aire. Suponiendo que la corriente de gas sea tan lenta que la mezcla del frasco pueda considerarse uniforme, ¿qué porcentaje de oxígeno habrá en el frasco después que han pasado 5 litros por él? Se supone que el aire contiene 21 °/₀ de oxígeno.

61. Un país tiene en circulación papel moneda por valor de mil millones de dólares. Los saldos de los bancos suman 5 millones de dólares por día. El gobierno decide introducir una nueva moneda, cambiándose todos los billetes antiguos que llegan a los bancos por otros nuevos. ¿Qué tiempo tardará el papel moneda en circulación en estar formado por papel nuevo en la proporción del 90 °/₀?

62. El aire contenido en un aula que acababa de utilizarse y que medía 7,62 m por 7,62 m por 3,66 m se comprobó que contenía 0,16 °/₀ de bióxido de carbono. ¿Cuántos metros cúbicos de aire conteniendo 0,04 °/₀ de CO_2 hay que admitir por minuto para que 10 minutos después la prueba acuse un porcentaje de 0,06 °/₀ de CO_2?

63. Suponiendo que el promedio de las personas respiren 20 veces por minuto y que exhalen de cada vez 1639 cm³ de aire que contiene 4 °/₀ de CO_2, hállese el porcentaje de CO_2 en el aire de un aula 1 hora después de entrar 30 alumnos, suponiendo que el aire fuera puro al principio y que los ventiladores admiten 28,3 m³ de aire fresco por minuto. Supóngase que el volumen del aula es 283 m³ y que el aire nuevo que entra contiene 0,04 °/₀ de CO_2.

64. Una fábrica de 42 m por 15 m por 4,5 m recibe de los ventiladores 283 m³ de aire nuevo por minuto que contiene 0,04 °/₀ de CO_2. A las siete y media de la mañana, media hora después de haber entrado los operarios, el contenido de CO_2 sube al 0,12 °/₀. ¿Qué porcentaje puede preveerse que habrá a mediodía?

12. Salida de agua por un orificio.—Si no hubiera pérdidas de energía, la velocidad de salida del agua por un orificio, a la profundidad h por debajo de la superficie, sería la adquirida por un cuerpo que cae desde la altura h, esto es,

$$\sqrt{2gh}.$$

Debido al rozamiento y a la forma convergente del chorro, la velocidad media con que el agua sale en realidad es

$$v = c\sqrt{2gh},$$

en la que, para pequeños orificios ordinarios con bordes agudos,

$$c = 0{,}6$$

aproximadamente. Utilizando este valor y $g = 9{,}8$,

$$v = 2{,}64\sqrt{h}.$$

Utilizando esta ecuación de continuidad pueden resolverse los problemas relativos a la salida de agua por un orificio. La pérdida de agua en el recipiente es igual a la diferencia entre la que sale y la que entra.

Ejemplo. Hallar el tiempo necesario para que un tanque cuadrado de lado 1,22 m y profundidad 1,80 m se vacie por un orificio circular de 2,54 cm de diámetro que tiene en el fondo.

Sea h la altura en metros del agua en el tanque en el tiempo t. El nivel del agua va bajando, y en el tiempo dt la pérdida con respecto a la superficie es un prisma de agua de base cuadrada de 1,49 m^2 y de altura $-dh$, cuyo volumen es

$$-1{,}49\,dh \text{ metros cúbicos.}$$

El agua que sale por el orificio en el tiempo dt engendra un cilindro de altura $v\,dt$ y base igual a un círculo de 2,54 cm de diámetro. Su volumen es

$$\pi\, 0{,}0127^2\, v\, dt \text{ metros cúbicos.}$$

Puesto que no entra agua en el tanque, la cantidad tomada de la superficie es igual a la cantidad que sale y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} -1{,}49\,dh &= 3{,}14 \times 0{,}0127^2\, v\, dt \\ &= 3{,}14 \times 0{,}0127^2 \times 2{,}64\sqrt{h}\, dt. \end{aligned}$$

Separando las variables

$$dt = -1146\frac{dh}{\sqrt{h}}$$

de donde

$$\int_0^t dt = -1146\int_{1{,}8}^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

y

$$t = 2975 \text{ segundos} = 49{,}6 \text{ minutos}.$$

13. Flujo de calor o electricidad. Difusión.—Si se mantienen constantes las temperaturas en las superficies que limitan un cuerpo, éste se acercará finalmente a un estado en que las temperaturas en los diferentes puntos pueden ser diferentes, pero en el que la temperatura en un punto determinado no varía con el tiempo. La cantidad de calor que pasa por la unidad de área a través de una superficie cualquiera en un punto P es, pues,

$$-k\frac{dT}{dn},$$

en la que T es la temperatura en P, dn es la distancia sobre la normal a la superficie, y k es una constante llamada *conductibilidad* del material. Se emplea el signo negativo para indicar que la dirección en que circula el calor es opuesta a la que sigue el aumento de temperatura.

Por simetría, en muchos casos la temperatura es una función de una sola coordenada x y en estas condiciones

$$-kA\frac{dT}{dx} = Q, \tag{12}$$

en la que Q es la cantidad de calor que pasa por un área A perpendicular a la dirección x. Cuando se usan las unidades c. g. s., Q se mide en calorías por segundo.

En el estado uniforme antes descrito, la cantidad de calor que pasa a una región cualquiera es igual a la que sale de la misma. Si tenemos una serie de superficies A tales que el calor que fluye a través de una fluye a través de todas las demás, la ecuación de continuidad tiene entonces la forma

$$Q = \text{constante.}$$

Si A está expresada en función de x, la solución de (12) con Q constante da T en función de x. Sustituyendo los valores de x y T en los límites, puede determinarse la constante de integración y Q.

Análogamente, cuando se difunde sal a través de un líquido, la cantidad que fluye en la dirección x a través de una superficie de área A perpendicular a x es

$$-DA\frac{dc}{dx} = q,$$

en la que D es el coeficiente de difusión y c la concentración en la distancia x.

Para el flujo continuo de electricidad tenemos una ecuación precisamente análoga

$$-\kappa A\frac{dE}{dx} = I,$$

en la que κ es la conductibilidad eléctrica, E el potencial e I la intensidad de la corriente.

Ejemplo. Una esfera hueca de hierro tiene de radio interior 6 cm y de radio exterior 10 cm ($k = 0{,}14$). Suponiendo que la temperatura interior sea 200°C y la exterior 20°C, hállese la temperatura a una distancia r del centro; hállese también la cantidad de calor por segundo que fluye hacia fuera a través de la esfera.

Debido a la simetría el flujo de calor es radial. A la distancia r del centro el área a través de la cual fluye es una superficie esférica de radio r y área

$$A = 4\pi r^2.$$

En estado uniforme no hay acumulación de calor entre las superficies. Por consiguiente, la misma cantidad de calor fluye por segundo a través de cada superficie esférica, y (12) se convierte en

$$-4\pi kr^2\frac{dT}{dr} = Q = \text{constante.}$$

Separando las variables e integrando entre los límites $T = 20$, $r = 10$ y $T = 200$, $r = 6$,

$$4\pi k\int_{20}^{200} dT = -Q\int_{10}^{6}\frac{dr}{r^2},$$

de donde

$$Q = 10{,}800\pi k.$$

Utilizando este valor de Q e integrando entre los límites $T = 20$, $r = 10$, y $T = T$, $r = r$,

$$4\pi k(T - 20) = 10{,}800\pi k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10}\right),$$

$$T = \frac{2700}{r} - 250.$$

La cantidad de calor que fluye a través de la esfera es

$$Q = 10{,}800\pi k = 4750 \text{ cal. por seg.}$$

PROBLEMAS

65. Un tanque cilíndrico de eje vertical tiene 2,44 m de profundidad y 1,22 m de diámetro. Suponiendo que el tanque esté lleno de agua, hallar el tiempo necesario para vaciarlo por un orificio circular de 2,54 cm de diámetro situado en el fondo.

66. Un tanque cilíndrico horizontal de 2,44 m de largo y 1,22 m de diámetro está lleno de agua. Hallar el tiempo necesario para vaciarlo por un orificio circular de 2,54 cm de diámetro que tiene en el fondo.

67. Un embudo de 25,4 cm de diámetro en la parte superior y 2,54 cm en el fondo tiene 45,7 cm de altura. Suponiendo que esté lleno de agua, hállese el tiempo que tardará en vaciarse.

68. Dos tanques verticales de 1,22 m de altura cada uno y 1,22 m de diámetro están unidos por un tubo corto de 5,1 cm de diámetro en el fondo. Suponiendo que uno de los tanques esté lleno y el otro vacío, hallar el tiempo necesario para que el agua alcance el mismo nivel en ambos. Supóngase que la velocidad del agua en el tubo es $c\sqrt{2gh}$ tomando $c = 0{,}8$.

69. En un tanque de 1,22 m de profundidad y base cuadrada de 1,52 m de lado entra agua a razón de 170 litros por minuto. Hallar el tiempo necesario para llenar el tanque si al mismo tiempo el agua se escapa por un orificio circular de 2,54 cm que hay en el fondo.

70. Una pared de ladrillo tiene 30 cm de grueso ($k = 0{,}0012$). Suponiendo que la superficie interior está a la temperatura de 20° C. y la exterior a 0° C., hallar la temperatura en la pared en función de la distancia a la superficie exterior. Hállese también la pérdida de calor por día a través de un metro cuadrado.

71. Una tubería de vapor de 20 cm de diámetro está protegida con un revestimiento de 10 cm de grueso de magnesia ($k = 0{,}00018$). Suponiendo que la superficie exterior esté a 30° C. y la superficie del tubo a 160° C., hallar la temperatura del revestimiento en función de la distancia al centro de la tubería. Determínese también la pérdida de calor por día en un metro de tubería.

72. Una tubería de vapor de 20 cm de diámetro tiene un revestimiento que consiste en 5 cm de magnesia ($k = 0{,}00018$) y por fuera de este revestimiento otro de 5 cm de hormigón ($k = 0{,}0020$). Suponiendo que la superficie exterior esté a 30° C. y la superficie de la tubería a 160° C., hallar la pérdida de calor por día en una longitud de 1 m de la tubería.

73. Un enrollamiento cilíndrico de alambre, cuya resistencia es 0,1 ohmio por centímetro de longitud paralela a su eje, está embutido en un tubo cilíndrico de cemento cuyos radios son 0,5 cm y 1 cm. Se halla por experiencia que una corriente eléctrica de 5 amperios mantiene una diferencia de temperatura de 125° C. entre las superficies interior y exterior. ¿Cuál es la conductibilidad del cemento? El calor producido por I amperios pasando por una resistencia de R ohmios es $Q = 0{,}239\, RI^2$ calorías por segundo.

74. Se sumerje en una gran cantidad de líquido una esfera de sal de radio a para que se disuelva. Hallar la concentración, supuesta uniforme, a la distancia r del centro de la esfera, suponiendo que tiene el valor de saturación s en la superficie de la esfera y es cero a una distancia teóricamente infinita.

75. Un alambre de radio r_1 se extiende a lo largo del eje de una envoltura cilíndrica de radio r_2 estando lleno el espacio intermedio con un material de conductibilidad eléctrica κ. Suponiendo que el potencial entre el alambre y la envoltura es E, hallar la pérdida de corriente por unidad de longitud de cable.

76. Un tubo de radio interior r_1 y de radio exterior r_2 y de conductibilidad k, contiene agua a la temperatura T. A través de las paredes del tubo fluye calor que se escapa al aire. Según la ley de Newton la pérdida de calor por unidad de área en la superficie del tubo es

$$a(T_1 - T_0),$$

en la que T_1 es la temperatura de la superficie exterior, T_0 la temperatura del aire y a es una constante. Hallar en el estado de régimen la pérdida de calor por unidad de longitud del tubo en función de las temperaturas T y T_0.

77. Por la tubería del problema anterior fluye agua con una velocidad v. Teniendo en cuenta la conducción de calor a través de las paredes y la convección por el agua en movimiento, pero despreciando la escasa conducción a lo largo de la corriente de agua y de la tubería, hallar la temperatura del agua en función de la distancia a lo largo de la tubería.

14. Problemas de segundo grado.—En un problema que contiene dos variables independientes x e y puede ocurrir que una cantidad z sea proporcional a x y también a y, es decir, que z es a la vez proporcional a las dos variables. Lo que quiere decirse con eso es que, manteniéndose y constante, z es proporcional a x, y supuesta x constante, z es proporcio-

nal a y. Ambas proposiciones, en el caso de proporcionalidad directa, se expresan por la ecuación

$$z = kxy,$$

en la que k es constante.

Así, la rapidez con que una sustancia x se disuelve es proporcional a la cantidad presente de esta sustancia, y también es proporcional a la diferencia

$$s - c,$$

en la que s es la concentración en la solución saturada y c es la concentración de la solución real. Estas condiciones se expresan ambas por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = kx(s - c). \tag{13}$$

El hecho de que la cantidad total de la sustancia presente (sólida o en disolución) es constante, nos da una ecuación que permite expresar c como una función de primer grado en x y hallar así $\frac{dx}{dt}$ como una función de segundo grado en x. Un proceso en el que la rapidez de variación de x viene dada por una función de segundo grado en x se llama a veces un problema de segundo grado.

Ejemplo 1. Hay que quitar el azufre que está mezclado con un material inerte disolviéndolo con benzol. El material contiene 6 gramos de azufre y se usan 100 gramos de benzol, que si se saturaran disolverían 11 gramos de azufre. Suponiendo que al cabo de 50 minutos se disuelve la mitad del azufre que contiene el material, ¿qué cantidad se habrá quitado en 6 horas?

Sea x el número de gramos de azufre no disuelto en el tiempo t. En la solución habrá, pues, $6 - x$ gramos.

$$c = \frac{6 - x}{100}.$$

Por otra parte, si se necesitan 11 gramos para saturar 100 gramos de benzol

$$s = \frac{11}{100} = 0{,}11.$$

La rapidez de disolución es, pues,

$$\frac{dx}{dt} = kx(s - c) = kx\left(0{,}11 - \frac{6 - x}{100}\right) = \frac{k}{100}x(5 + x).$$

Si 3 gramos se disuelven en 50 minutos,

$$\int_6^3 \frac{dx}{x(5 + x)} = \frac{k}{100}\int_0^{50} dt.$$

Esto da

$$k = \frac{2}{5}\ln\frac{11}{16} = -0{,}15.$$

Al cabo de 6 horas tenemos, pues,

$$\int_6^x \frac{dx}{x(5 + x)} = -\frac{0{,}15}{100}\int_0^{360} dt,$$

que da $x = 0{,}19$ gramos de azufre no disuelto.

Ejemplo 2. El alargamiento de una cuerda elástica de longitud inicial x bajo la acción de una fuerza F es proporcional a x y también a F. Hallar el alargamiento de una cuerda de longitud l cuando está suspendida de un extremo y se la deja que se alargue por la acción de su propio peso w.

Representemos por x la distancia desde el extremo inferior medida a lo largo de la cuerda no estirada, y por dx la diferencial de esa distancia. Tanto x como dx se estiran cuando la cuerda se alarga por la acción de su propio peso. Del enunciado del problema se deduce que el alargamiento de dx es proporcional a dx y también a la fuerza que la estira, que en este caso es el peso de la cuerda por debajo de ella. Puesto que x se midió a lo largo de la cuerda no estirada, este peso es $\frac{wx}{l}$. Por consiguiente,

$$\frac{kwx\ dx}{l}$$

es el alargamiento de dx. Integrando entre los límites $x = 0$, $x = 1$, se obtiene

$$\tfrac{1}{2}\, kwl$$

para el alargamiento total de la cuerda.

PROBLEMAS

78. Una masa de material inerte que contiene 2,722 Kg de sal es agitada con 37,85 litros de agua. En 5 minutos se han disuelto 907 gramos de sal. ¿Cuándo se habrá disuelto el 99 °/₀ de la sal? Una solución saturada contiene 360 gramos de sal por litro.

79. Una masa de material insoluble contiene 13,608 Kg de sal. Se agita con 75,7 litros de agua durante 1 hora al cabo de la cual se halla que se ha disuelto la mitad de la sal. ¿Cuánta sal se hubiera disuelto en el mismo tiempo si se hubiera utilizado doble cantidad de agua?

80. Un peso P está suspendido por una cuerda elástica de longitud l y peso w. Hállese el alargamiento de la cuerda.

81. La cantidad de luz absorbida al pasar a través de una lámina delgada de agua es directamente proporcional a la cantidad de luz que cae sobre la superficie y también al espesor de la lámina de agua. Suponiendo que fuera absorbida una tercera parte de la luz al penetrar hasta 3 m, ¿qué cantidad de luz llegaría a la profundidad de 18 m?

82. La rapidez con que varía la tensión de vapor con respecto a la temperatura para un líquido es directamente proporcional a su tensión de vapor e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura absoluta. Suponiendo que la tensión del vapor de agua sea de 4,58 mm a 0° C. y 31,8 mm a 30° C., hallar la ecuación que expresa la tensión de su vapor en función de la temperatura.

83. Dos sustancias, A y B, se combinan para formar una tercera sustancia C, uniéndose una molécula de A con una de B para producir una de C. La rapidez con que se forma C es directamente proporcional a las cantidades de A y B presentes. Si las cantidades iniciales de esas sustancias eran a y b gramos-moléculas respectivamente, hallar la cantidad de C que se obtiene en el tiempo t.

84. Supongamos que una gota de lluvia que cae a través de una niebla uniforme permanece siempre esférica pero recoge las partículas de niebla en la región que atraviesa. Hállese su radio en función de la distancia recorrida.

85. Un material poroso se seca con una rapidez directamente proporcional a la humedad que contiene y también a la diferencia entre la humedad del aire y la del aire saturado. Una cantidad de material que contiene 4,536 Kg de humedad se coloca en un almacén cuyo volumen es 56,62 m³. Al principio la proporción de humedad del aire era del 25 °/₀. El aire saturado a la temperatura dada contiene aproximadamente 240,33 gramos de humedad por metro cúbico. Si se mantiene la humedad del aire al 25 °/₀ por medio de una ventilación adecuada, y la sustancia pierde la mitad de su humedad en la primera hora, ¿cuánto tiempo se necesitará para que pierda el 90 °/₀ de su humedad?

86. Si el almacén del problema anterior estuviera cerrado, la humedad del aire aumentaría a medida que se evaporara la humedad del material. En condiciones tales, ¿cuánta humedad perdería la sustancia durante la primera hora?

87. En el crecimiento de una población, surgen circunstancias que impiden que su número exceda de un cierto máximo M. Como consecuencia, la rapidez de crecimiento en el tiempo t es directamente proporcional al número N en ese momento y a la diferencia entre N y el número máximo M. Demostrar que

$$N = \frac{M}{1 + e^{-at}},$$

en la que a es constante y t se mide a partir del momento en que la población tiene su valor medio. Para Estados Unidos

Año	*Población*
1790	3 929 000
1850	23 192 000
1910	91 972 000

Hallar el máximo.

15. Relaciones diferenciales. — Al establecer ecuaciones diferenciales puede abreviarse a menudo el proceso empleando un procedimiento simplificado que parece aproximado pero da resultados exactos. Así, en lo que respecta a las primeras diferenciales, una pequeña parte de una curva puede tratarse como si fuera una recta y una parte de una superficie próxima a un punto, como un plano; durante un corto intervalo de tiempo dt, puede considerarse un punto material como moviéndose con una velocidad constante y un proceso físico puede suponerse que tiene lugar con una velocidad uniforme. La razón por la que estas suposiciones dan resultados correctos es que la razón de las diferenciales es, por definición, el límite de la razón de los incrementos, y a medida que tienden a cero esas condiciones sencillas se satisfacen con tanta mayor aproximación.

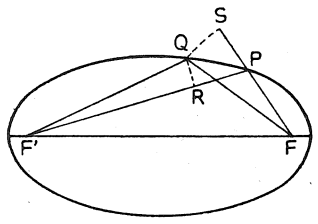

Fig. 7

Los métodos para establecer relaciones diferenciales de esta manera se denominan a menudo métodos diferenciales. Tal como los exponemos aquí se aplican únicamente a las primeras diferenciales o a las primeras derivadas. Al considerar una pequeña parte de una curva como recta y una velocidad constante durante el proceso físico, no se obtendrá, en general, la ecuación correcta que vendría dada en derivadas segundas.

Ejemplo 1. Hallar la forma de un espejo tal que toda la luz procedente de un punto fijo es reflejada a otro punto fijo.

Supongamos (fig. 7) que la luz procedente de F es reflejada a F'. El espejo tiene que tener la forma de una superficie de revolución. De lo contrario la luz que saliera de F en un plano que pasara por FF' no sería reflejada en el mismo

plano y, por tanto, no podría ir a parar a F'. Desde F como centro tracemos el arco QS, y desde F' como centro el arco QR. Los triángulos PQS y PQR son rectángulos en S y R. Considerados estos triángulos como rectilíneos, se trata de triángulos rectángulos planos con la hipotenusa común PQ. Además, puesto que los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales,

$$\angle QPS = \angle QPR.$$

Por consiguiente, los triángulos son también iguales y

$$PS = PR. \qquad (a)$$

Sea $r = FP$, $r' = F'P$. Al pasar de P a Q el aumento de r es

$$dr = PS,$$

y el de r' es

$$dr' = -PR.$$

Por consiguiente, de (a) se deduce

$$dr = -dr',$$

y también

$$r + r' = \text{constante}.$$

La sección del espejo por un plano que pase por FF' es, pues, una elipse cuyos focos son F, F', y la superficie del espejo es un elipsoide de revolución.

Si se siente alguna duda en lo que respecta a tratar a los lados de los pequeños triángulos como rectas, podemos considerar el dibujo como ampliado uniformemente hasta que la distancia FF' es un millón de kilómetros mientras PQ es sólo 1 cm. Las líneas serán entonces tan rectas que ningún instrumento podrá descubrir la diferencia, y, sin embargo, los triángulos serán semejantes a los del dibujo cuando PQ se hace suficientemente pequeño.

Ejemplo 2. Si el aire, al moverse desde un nivel a otro, se dilata sin recibir o ceder calor, esto es, adiabáticamente, se verifica

$$p = k\rho^n, \quad n = 1{,}4,$$

en la que p es la presión, ρ la densidad y k una constante. Esto supuesto, si la densidad a nivel del mar es 1,28 Kg/m^3 y la presión es 1 Kg/cm^2, hallar la altura de la atmósfera.

La presión a un nivel cualquiera se debe al peso del aire que está encima. Imaginemos una columna de aire de 1 m^2 de sección que tiene su base al nivel del mar. La presión a la altura h es el peso de esta columna por encima de esa altura. Al moverse hacia arriba una distancia dh la variación de la presión es el peso del volumen dh de aire. Por consiguiente

$$dp = -\rho\, dh,$$

usándose el signo negativo porque la presión disminuye. Reemplazando p por su valor $k\rho^n$, esta expresión se convierte en

$$dp = nk\rho^{n-1}\, d\rho = -\rho\, dh.$$

Separando las variables e integrando,

$$\int_0^H dh = -\int_{\rho_0}^0 nk\rho^{n-2}\, d\rho,$$

en la que H es la altura de la atmósfera y $\rho_0 = 1{,}28$ es la densidad al nivel del mar. Por lo tanto

$$H = \frac{nk\rho_0^{n-1}}{n-1} = \frac{nk\rho_0^n}{(n-1)\,\rho_0}.$$

Al nivel del mar

$$p_0 = k\rho_0^n.$$

Y por consiguiente

$$H = \frac{np_0}{(n-1)\,\rho_0} = \frac{(1{,}4)\,(10000)}{(0{,}4)\,(1{,}28)} = 28\,000 \text{ m},$$

o sea unos 28 kilómetros.

PROBLEMAS

88. Hallar la superficie de un espejo tal que toda la luz procedente de un punto fijo sea reflejada paralelamente a una línea fija. Tómese el punto fijo como origen y supóngase que la luz se refleja paralelamente al eje de las x. Usense la coordenada polar r y la coordenada x como variables.

89. En cierto tipo de telescopio, la luz que converge hacia un punto fijo es reflejada por un espejo hasta otro punto. Hallar la forma del espejo.

90. Hallar la presión y la altura h sobre el nivel del mar suponiendo que la densidad del aire bajo la presión p es

$$\rho = kp \text{ kilos por centímetro cúbico.}$$

y que la presión al nivel del mar es de 1 Kg/cm^2.

91. Según la ley de Newton la fuerza de la gravedad sobre una masa de w kilos a la distancia r del centro de la tierra es

$$\frac{wR^2}{r^2}.$$

en la que R es el radio de la tierra. Partiendo de la ley de Boyle y teniendo en cuenta esta variación de la fuerza de la gravitación con la distancia, hállese la presión del aire a la distancia r del centro de la tierra.

92. Un cilindro lleno de un líquido de densidad ρ gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω. Finalmente el líquido girará como un cuerpo rígido. Si el radio es a y la presión en el centro p_0, hallar la presión en la superficie teniendo en cuenta la fuerza centrífuga. Tómese un elemento de volumen a la distancia r del eje y hágase uso del hecho que este elemento está en equilibrio bajo las presiones que actúan sobre sus superficies y la fuerza centrífuga.

93. Un cilindro que contiene un gas gira alrededor de su eje con una velocidad angular ω. Partiendo de la ley de Boyle

$$p = k\rho,$$

en la que p es la presión, ρ la densidad y k una constante, hallar la ley que relacione la presión del gas con la distancia r al eje.

94. Suponiendo que la densidad del agua del mar bajo la presión de p kilos por metro cuadrado sea

$$1 + 9{,}8\,(10^{-8})\,p$$

multiplicado por su densidad en la superficie (1,025 Kg/litro), demostrar que la superficie de un océano de 8 046 metros de profundidad tiene una altura menor de unos 137,16 m de la que tendría si el agua fuera incompresible.

95. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre una correa y una polea sea μ y el ángulo de contacto α, demuéstrese que las tensiones T_1, T_2 en los dos lados de la correa cuando está resbalando satisfacen la ecuación

$$T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}.$$

96. Si la velocidad es elevada, la fuerza centrífuga reduce la presión de la correa sobre la polea. Suponiendo que el peso de la correa sea de w kilos por unidad de longitud y su velocidad v, hállese la ecuación que une las tensiones en los dos ramales de la correa.

PROBLEMAS DIVERSOS

97. Uno de los modelos de clepsidra, o reloj de agua, usados en la antigüedad, consistía en un recipiente que contenía agua que pasaba por un orificio que había en el fondo, siendo la forma del recipiente tal que la superficie del agua bajaba a una velocidad constante. Hallar el área de su sección horizontal en función de la altura por encima del orificio.

98. Un cable vertical sostiene un peso de P kilos. Si el cable está hecho de un material que pesa w kilos por metro cúbico y tiene una forma cónica tal que en cada sección transversal la tensión es S kilos por metro cuadrado, hallar el área de la sección transversal en función de la distancia h en metros desde el extremo inferior.

99. Demostrar que cuando un líquido gira alrededor de un eje vertical su superficie forma un paraboloide de revolución. Obsérvese que el peso de una partícula de agua en la superficie y la fuerza centrífuga que actúa sobre la partícula tienen que tener una resultante perpendicular a la superficie.

100. El nivel del agua en el suelo varía con la posición horizontal debido a la lenta absorción de aquélla por el terreno. La presión del agua en un punto cualquiera es proporcional a la profundidad por debajo de este nivel, y la rapidez con que el agua fluye por este punto es proporcional a la inclinación de la curva de presión, esto es, a la derivada de la presión con respecto a la distancia en la dirección en que se realiza el flujo. Suponiendo una capa horizontal en el fondo formada por materiales a través de los cuales no se filtra el agua, y un estado uniforme de flujo, expresar la altura del agua en el suelo en función de la distancia desde una zanja recta horizontal.

101. Haciendo las mismas suposiciones que en el problema anterior determinar el nivel del agua en el terreno que rodea un estanque de forma circular en función de la distancia desde un punto dado al centro del mismo.

102. Suponiendo que la velocidad de salida es pequeña y la temperatura constante, la rapidez con que el gas sale de un gasómetro es proporcional a

$$p^2 - p_0^2,$$

en la que p es la presión en el gasómetro y p_0 la presión exterior. Partiendo de la ley de Boyle y suponiendo que p_0 sea constante, demostrar que

$$\ln\frac{p - p_0}{p + p_0} = kt + c,$$

en la que k y c son constantes y t es el tiempo.

103. Partiendo de la ley de los gases perfectos, entre la presión y la densidad del aire, existe la relación

$$p = 29\,\rho\,(t + 273),$$

en la que p es la presión en Kg/m², ρ la densidad en Kg/m³ y t la temperatura en grados centígrados. Suponiendo que la presión atmosférica y la temperatura al nivel del mar sean 1 Kg/cm² y 15° C., respectivamente, y que la temperatura baje 2° C. por cada 300 metros de altura, hallar la presión a una altura de 7 200 m.

104. En un tipo de aparato para medir las longitudes de onda, la placa del condensador variable tiene una forma tal que la rotación del radio en un pequeño ángulo dado aumenta el área total en el mismo porcentaje para todas las posiciones de la escala. Hallar la forma de la placa.

105. Para poder leer directamente las frecuencias, la placa de un condensador variable tiene una forma tal que en la parte de la escala utilizada el área limitada por un radio variable es inversamente proporcional a θ^2. Hallar la curva formada por el borde de la placa.

106. A la distancia r del punto que emite la luz, la intensidad de la iluminación es

$$\frac{k \cos \phi}{r^2} .$$

sobre una superficie cuya normal forma un ángulo φ con r. Hallar la superficie de revolución cuyos puntos están todos igualmente iluminados por la luz emitida por un foco situado en el eje.

107. Un tanque cuya capacidad es 12735 litros contiene 7075 litros de agua, estando el volumen restante ocupado por aire a una presión de 7 Kg/cm^2. Suponiendo que el aire se dilate de acuerdo con la ley de Boyle, hallar el tiempo necesario para que el líquido salga del tanque por un orificio circular de 5 cm de diámetro situado en el fondo. Prescíndase de la presión debida a la pequeña carga de agua sobre el orificio y de la presión exterior del aire.

108. Suponiendo en el problema anterior que el líquido del tanque sea gasolina de densidad 0,7, hallar el tiempo que tardaría en vaciarse. Supóngase que el coeficiente c en la fórmula de descarga es el mismo para la gasolina y para el agua.

109. El extremo de un árbol vertical de radio a se apoya sobre una quicionera plana. Suponiendo que la superficie horizontal de la quicionera soporta una carga uniforme de p kilos por centímetro cuadrado (cojinete nuevo) y que el coeficiente de rozamiento sea μ, hallar el trabajo realizado en una revolución para vencer el rozamiento.

Una quicionera vieja está un poco más desgastada en el borde que en el centro y la presión varía de tal manera que el desgaste es el mismo en todos los puntos. Suponiendo que el desgaste en un punto cualquiera es proporcional al trabajo de rozamiento por unidad de superficie en ese punto, hallar la ley que rige la variación de la presión y demostrar que con una carga total dada el trabajo por revolución es sólo las tres cuartas partes del que tiene lugar en una quicionera nueva.

110. En el caso del pivote Schiele el extremo del árbol vertical y la superficie de la quicionera que lo soporta tienen una forma tal, que la presión normal entre los dos es constante tanto cuando la quicionera es nueva como cuando ya está usada. Hallar la forma que hay que darle.

CAPÍTULO II

OTRAS ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

16. Ecuaciones diferenciales exactas. — Una ecuación diferencial de la forma

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (14)$$

sa llama *exacta* cuando existe una función u cuya diferencial total es igual al primer miembro de la ecuación, es decir, cuando se verifica

$$du = M\,dx + N\,dy.$$

En este caso, la ecuación (14) puede escribirse

$$du = 0,$$

y así su solución es

$$u = c.$$

Para que la ecuación (14) sea una ecuación diferencial exacta debe verificarse

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \qquad (15)$$

Para demostrarlo, supongamos primero que existe una función u tal que

$$du = M\,dx + N\,dy.$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Y como, según sabemos, se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},$$

se deduce

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

que es lo que se quería demostrar.

En consecuencia, si $M\,dx + N\,dy$ es una diferencial exacta, M y N verifican la ecuación (15).

Vamos a demostrar ahora que si se verifica

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

existe una función u tal que

$$du = M\,dx + N\,dy.$$

En efecto, sea

$$w = \int M\,dx$$

la integral de $M\,dx$, obtenida supuesta y constante. Veamos ahora que la expresión

$$N = \frac{\partial w}{\partial y}$$

es únicamente una función de y. Para ello bastará ver que su derivada respecto a x es nula, y en efecto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M\,dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Si ahora tomamos

$$u = w + \int\left(N - \frac{\partial w}{\partial y}\right)dy,$$

tendremos

$$du = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(N - \frac{\partial w}{\partial y}\right)dy$$
$$= M\,dx + N\,dy.$$

Esta igualdad nos dice, que si se verifica

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

existe una función u cuya diferencial es $M\,dx + N\,dy$, como se quería demostrar.

Resolver la ecuación (14) es hallar esta función u. Si los términos pueden disponerse en grupos de manera que sean los términos de una diferencial exacta, el valor de u puede obtenerse integrando esos grupos por separado.

Si no se puede hacer esto, puede ensayarse la condición (15) para ver si la ecuación es exacta. En caso afirmativo el valor de u puede hallarse partiendo del hecho que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M.$$

Puesto que la diferenciación es parcial, u puede hallarse por integración parcial con respecto a x,

$$u = \int M\,dx + f(y),$$

siendo la constante posiblemente una función de y porque cualquier función de esta clase es constante en una integración con y constante. Esta función de y puede hallarse igualando la diferencial total de u a $M\,dx + N\,dy$.

En la mayoría de los casos cada término de la diferencial de

$$\int M\,dx$$

tendrá x o dx como factor. Por consiguiente, $df(y)$ será igual a aquellos términos de $N\,dy$ que no contienen x. Así $f(y)$ puede de ordinario obtenerse integrando los términos $N\,dy$ que no contienen x. En casos excepcionales es posible que esto no sea correcto. Debe, pues, comprobarse la solución diferenciando.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial

$$(x + y)\,dx + (2y + x)\,dy = 0.$$

Esta ecuación podemos escribirla en la forma

$$x\,dx + 2y\,dy + (y\,dx + x\,dy) = 0.$$

Cuya solución es

$$\tfrac{1}{2}x^2 + y^2 + xy = c.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$$

En este caso

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^y) = e^y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xe^y - 2y) = e^y.$$

Siendo iguales esas derivadas, la ecuación es exacta. Por consiguiente, integrando $M\,dx$ considerando y constante, obtenemos

$$u = \int e^y\,dx = xe^y + f(y),$$

$$du = e^y\,dx + [xe^y + f'(y)]\,dy,$$

en la que $f'(y)$ es la derivada de $f(y)$. Comparando esta ecuación con la dada, vemos que

$$f'(y) = -2y$$

y por consiguiente

$$f(y) = -y^2,$$

no añadiéndose ninguna constante de integración porque lo único que queremos es hallar una función u que tenga la diferencial dada. La integral general es

$$u = xe^y - y^2 = c.$$

El valor de $f(y)$ podría haberse obtenido integrando $-2y\,dy$, que es la parte de

$$(xe^y - 2y)\,dy$$

que no contiene x.

17. Factores de integración.—Si una ecuación de la forma

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

no es exacta, puede siempre hacerse que lo sea multiplicándola por un factor adecuado. Ese multiplicador recibe el nombre de *factor de integración*, o factor integrante.

Por ejemplo, la ecuación

$$y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$$

no es exacta. Sin embargo, puede escribirse

$$y\,dx - x\,dy + xy^2\,dx = 0,$$

que dividida por y^2 se convierte en

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + x\,dx = 0.$$

Ambos términos de esta ecuación son diferenciales exactas, y la solución es

$$\frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 = c.$$

En este caso un factor de integración es $\frac{1}{y^2}$.

Aunque una ecuación de la forma $M\,dx + N\,dy = 0$ tiene siempre factores de integración, el obtenerlos presenta, en general, serias dificultades.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$y(2x + y^3)\,dx - x(2x - y^3)\,dy = 0.$$

Esta ecuación puede escribirse en la forma

$$(2xy\,dx - 2x^2\,dy) + (y^4\,dx + xy^3\,dy) = 0.$$

El primer grupo de términos sugiere los factores x^2, e y^2, que a causa del signo negativo tienen que ponerse en forma de fracción. Multiplicando por y y dividiendo por y^4, tenemos

$$\frac{2xy^2\,dx - 2x^2y\,dy}{y^4} + (y\,dx + x\,dy) = 0.$$

Esta ecuación tiene ahora la forma de dos diferenciales exactas. Su solución es

$$\frac{x^2}{y^2} + xy = c.$$

EJERCICIOS

111. $y\,dx + (x + y)\,dy = 0$.

112. $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

113. $x(x - 2y)\,dy - y(y - 2x)\,dx = 0$.

114. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0$.

115. $(r\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,dr - r\cos\theta\,(r\operatorname{sen}\theta + 1)\,d\theta = 0$.

116. $(3x^2y - 2y^3)\,dx + (x^3 - 6xy^2)\,dy = 0$.

117. $(3x^2y + 2x)\,dx + (x^3 - 1)\,dy = 0$.

118. $e^x(y^3 + xy^3 + 1)\,dx + 3y^2(xe^x - 6)\,dy = 0$.

119. $(2xe^y + y^2e^x + 2x)\,dx + (x^2e^y + 2ye^x)\,dy = 0$.

120. $y\,dx - (x + y)\,dy = 0$.

121. $x\,dy - (x^2 + y)\,dx = 0$.

122. $y^2\,dx + x^2\,dy - 2xy\,dy = 0$.

123. $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$.

124. $y(3x - 2y)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$.

125. $x\,dy - y\,dx + (x^2 + y^2)\,dx = 0$.

126. $y(xy + 1)\,dx - x\ln x\,dy = 0$.

127. $(x + y)\,dy - (y - x)\,dx = 0$.

128. $\cos\theta\,(1 + 2r\cos^2\theta)\,dr + r\operatorname{sen}\theta\,(1 - r\cos^2\theta)\,d\theta = 0$.

129. $(r^2\sec\theta - \operatorname{tg}\theta)\,dr + r\sec\theta(\sec\theta + r^2\operatorname{tg}\theta)\,d\theta = 0$.

130. $e^x(x + 1)\,dx + (ye^y - xe^x)\,dy = 0$.

18. Ecuaciones lineales.—Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{16}$$

en la que P y Q son funciones de x o constantes, se dice que es lineal en y. Una ecuación similar en la que se hayan intercambiado x e y, se denomina lineal en x. Una ecuación

lineal es, pues, una ecuación de primer grado en una de las variables y su derivada. Pueden existir cualesquiera otras funciones de la otra variable.

Cuando la ecuación es de la forma (16), la expresión

$$e^{\int P\,dx}$$

es un factor integrante; pues, cuando se la multiplica por este factor, la ecuación se convierte en

$$e^{\int P\,dx}\frac{dy}{dx} + ye^{\int P\,dx}P = e^{\int P\,dx}Q.$$

El primer miembro es la derivada de

$$ye^{\int P\,dx}$$

Por consiguiente

$$ye^{\int P\,dx} = \int e^{\int P\,dx}Q\,dx + c. \tag{17}$$

es la solución.

Un segundo método para resolver una ecuación lineal consiste en efectuar la sustitución

$$y = uv.$$

En efecto, de esta igualdad se deduce

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

y la ecuación (16) se convierte en

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv = Q$$

o sea,

$$u\left(\frac{dv}{dx} + Pv\right) + \left(v\frac{du}{dx} - Q\right) = 0.$$

Esta ecuación será satisfecha si cada término por separado es nulo. Por consiguiente, igualando a cero el coeficiente de u

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0,$$

y también

$$v\frac{du}{dx} - Q = 0,$$

obtenemos dos ecuaciones diferenciales de fácil solución. En efecto, resolviendo la primera de esas ecuaciones se obtiene v en función de x, no añadiéndose ninguna constante de integración puesto que lo único que se desea es un solo valor de v. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación e integrando se obtiene u en función de x. Esta vez se añade una constante de integración, pues queremos que

$$y = uv$$

sea la solución general del problema.

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4.$$

Siendo esta ecuación de primer grado en y y dy es una ecuación lineal. Para reducirla a la forma normal (16) tenemos que dividirla por x, obteniendo

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^3.$$

En este caso

$$\int P\,dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\ln x = \ln x^2.$$

Por consiguiente,

$$e^{\int P\,dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

El factor integrante es, pues, x^2. Multiplicando por este factor y cambiando a diferenciales, la ecuación se convierte en

$$x^2\,dy + 2xy\,dx = x^5\,dx.$$

El primer miembro es la diferencial de x^2y, y la solución es, por tanto,

$$x^2y = \tfrac{1}{6}x^6 + c.$$

Utilizando el segundo método escribiríamos

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Por consiguiente,

$$x\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) + 2uv = x^4,$$

o sea

$$u\left(x\frac{dv}{dx} + 2v\right) + \left(xv\frac{du}{dx} - x^4\right) = 0.$$

Igualando a cero el coeficiente de u, tenemos

$$x\frac{dv}{dx} + 2v = 0,$$

$$\ln v = -2\ln x,$$

$$v = \frac{1}{x^2}.$$

Sustituyendo este valor en el segundo término se obtiene

$$xv\frac{du}{dx} - x^4 = \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - x^4 = 0,$$

y, por consiguiente,

$$u = \tfrac{1}{6}x^6 + c.$$

Por último, tenemos

$$y = uv = (\tfrac{1}{6}x^6 + c)\frac{1}{x^2},$$

o sea

$$x^2y = \tfrac{1}{6}x^6 + c$$

que es la misma solución obtenida anteriormente.

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$(1 + y^2)\,dx - (xy + y + y^3)\,dy = 0.$$

Esta ecuación es de primer grado en x y dx. Dividiendo por $(1 + y^2)\,dy$ adopta la forma

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{1 + y^2}x = y,$$

en la que el valor de P es aquí una función de y, y por lo tanto, el factor integrante será

$$\int P\,dy = \int \frac{-y\,dy}{1 + y^2} = -\tfrac{1}{2}\ln(1 + y^2),$$

$$e^{\int P\,dy} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

Multiplicando por este factor, la ecuación se convierte en

$$\frac{dx}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{xy\,dy}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + y^2}},$$

de donde

$$\frac{x}{\sqrt{1 + y^2}} = \sqrt{1 + y^2} + c,$$

y despejando el valor de x

$$x = 1 + y^2 + c\sqrt{1 + y^2}.$$

que es la solución de la ecuación.

Para resolverla mediante el segundo método, hagamos

$$x = uv, \quad dx = u\,dv + v\,du,$$

y tenemos

$$u[(1 + y^2)\,dv - vy\,dy] + [(1 + y^2)\,v\,du - (y + y^3)\,dy] = 0.$$

Por consiguiente,

$$\frac{dv}{v} = \frac{y\,dy}{1 + y^2}$$

$$\ln v = \tfrac{1}{2}\ln(1 + y^2),$$

$$v = \sqrt{1 + y^2}.$$

Utilizando este valor de v podemos calcular el de u de la siguiente manera

$$(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}du - (y + y^3)\,dy = 0,$$

$$du = \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + y^2}},$$

$$u = \sqrt{1 + y^2} + c,$$

con estos valores de u y v la solución de la ecuación será

$$x = uv = 1 + y^2 + c\sqrt{1 + y^2},$$

idéntica a la obtenida por el primer método.

19. Ecuaciones que pueden reducirse a lineales.—Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n, \tag{18}$$

en la que P y Q son funciones de x o constantes, puede reducirse a otra lineal mediante un cambio de variable. Dividiendo por y^n se convierte en

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q.$$

Si tomamos

$$y^{1-n} = u$$

como nueva variable, la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + Pu = Q,$$

que es lineal en u.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^3}.$$

Dividiendo por y^3 se tiene

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}.$$

Hagamos

$$u = y^{-2},$$

entonces

$$\frac{du}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx},$$

de donde

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo esos valores obtenemos

$$-\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^3},$$

y también

$$\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}u = -\frac{2}{x^3}.$$

Esta es una ecuación lineal cuya solución es

$$u = \frac{1}{3x^2} + cx^4.$$

y puesto que $u = y^{-2}$, resulta finalmente

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + cx^4.$$

EJERCICIOS

131. $\frac{dy}{dx} - y = e^x$.

132. $x\frac{dy}{dx} + 2y = 3x$.

133. $y\,dx = (2x + 2y^4)\,dy$.

134. $(x+1)^2\frac{dy}{dx} + 3(x+1)y = 2$.

135. $\operatorname{tg} x\frac{dy}{dx} - 2y = 2a$.

136. $x^2\,dy = (4 - 3x - 3xy)\,dx$.

137. $(y^3 - y)\,dx + (xy^2 + x - y^2 + 1)\,dy = 0$.

138. $(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} + xy = x(x^2 - 1)$.

139. $x\frac{dy}{dx} + y(x\operatorname{ctg} x + 1) = \operatorname{ctg} x$.

140. $(x + \operatorname{sen} y - 1)\,dy + \cos y\,dx = 0$.

141. $x^2\dfrac{dy}{dx} + (x^2 + 2x)\,y = 1$.

142. $y\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0$.

143. $x^2\dfrac{dy}{dx} - y^2 = 2xy$.

144. $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy + y^3e^x = 0$.

145. $(y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$.

146. $y\,dx = (y^3 - x)\,dy$.

147. $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3$.

148. $(2xy^3 - y)\,dx + 2x\,dy = 0$.

149. $y\,dx + (x^2y^4 - 3x)\,dy = 0$.

150. $(x^2 - 1)\,dy - y(2x - 3y)\,dx = 0$.

151. $2\cos y\,dx - (x \operatorname{sen} y - x^3)\,dy = 0$.

20. Ecuaciones homogéneas.—El grado de una expresión algebraica depende de las variables a que se refiera. Así, en Geometría analítica, una ecuación lineal es una ecuación de primer grado en las coordenadas, mientras que una ecuación diferencial es lineal, si es de primer grado en una variable y su derivada. Una vez indicadas las variables, el grado de un producto es la suma de los exponentes con que entran en el producto. Así,

$$x^2y$$

es una expresión de segundo grado en x, de primer grado en y y de tercer grado en x e y.

Cualquiera que sea la definición del grado que se utilice, se dice que una expresión es homogénea si es una suma de términos que tienen todos el mismo grado. Así,

$$x^2 + xy - y^2$$

es homogénea en x e y, puesto que cada término es de segundo grado. De una manera general, se dice que $f(x, y)$ es una función homogénea de grado n en x e y si se verifica la igualdad

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{19}$$

para todos los valores de t, x, y. Así, $\sqrt{x^2 + y^2}$ es una función homogénea de primer grado, pues si se reemplazan x e y por tx y ty se convierte en

$$\sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} = t\sqrt{x^2 + y^2}.$$

La ecuación diferencial

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado en x e y. Así, por ejemplo, la ecuación

$$3x\,dx + \sqrt{x^2 + y^2}\,dy = 0$$

es *homogénea*, por ser los coeficientes de dx y dy ambos funciones homogéneas de primer grado.

Para resolver una ecuación homogénea en x e y, se efectúa la sustitución

$$y = vx,$$

o bien

$$x = vy.$$

La nueva ecuación en v y x o en v e y será de variables separables y, por consiguiente, puede integrarse separando las variables. Para demostrarlo, supongamos que

$$M = f_1(x, y), \quad N = f_2(x, y)$$

son ambas funciones homogéneas de grado n en x e y. Según la ecuación (19)

$$f_1(x, vx) = x^n f_1(1, v),$$
$$f_2(x, vx) = x^n f_2(1, v),$$

las cantidades t, x, y de (19) siendo en este caso reemplazadas por x, 1, v. Sustituyendo $y = vx$ tenemos, pues,

$$\frac{M}{N} = \frac{f_1(1, v)}{f_2(1, v)} = f(v).$$

La ecuación diferencial dada puede escribirse bajo la forma

$$dy + \frac{M}{N}\,dx = 0,$$

o sea

$$v\,dx + x\,dv + f(v)dx = 0.$$

Esta expresión equivale a

$$[v + f(v)]\,dx + x\,dv = 0,$$

que es una ecuación con variables separables.

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Esta es una ecuación homogénea, ya que los coeficientes son funciones homogéneas de primer grado. Sustituyendo,

$$y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx},$$

la ecuación se convierte en

$$x\left(v + x\frac{dv}{dx}\right) - vx = \sqrt{x^2 + v^2x^2},$$

y, por consiguiente,

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}.$$

Esta es una ecuación de variables separables cuya solución es

$$x = c\,(v + \sqrt{1 + v^2}).$$

Reemplazando v por su valor $\frac{y}{x}$, trasponiendo, elevando al cuadrado, etc., se obtiene

$$x^2 - 2cy = c^2.$$

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$2x^2\,dy + (y^2 - 2xy - x^2)\,dx = 0.$$

Esta es una ecuación homogénea, ya que los coeficientes de dx y dy son funciones homogéneas de segundo grado. Hagamos

$$y = vx, \quad dy = v\,dx + x\,dv,$$

y la ecuación adopta la forma

$$2x^2(v\,dx + x\,dv) + (v^2x^2 - 2x^2v - x^2)\,dx = 0,$$

que se reduce a

$$2x\,dv + (v^2 - 1)\,dx = 0.$$

Separando las variables e integrando,

$$\ln\frac{v - 1}{v + 1} + \ln x = \ln c,$$

por consiguiente

$$x\,(v - 1) = c\,(v + 1).$$

Reemplazando v por $\frac{y}{x}$ esta expresión se convierte en

$$x\,(y - x) = c\,(y + x),$$

o sea

$$y = \frac{x(x + c)}{x - c}.$$

21. Ecuaciones que pueden convertirse en homogéneas.— Hasta ahora hemos considerado a x e y como de primer grado, y una expresión como homogénea si es una suma de términos que son todos del mismo grado. A veces, una expresión que no es homogénea en este sentido puede hacerse homogénea si se considera x e y de diferentes dimensiones, análogamente a como se consideran las magnitudes en la ecuación de dimensiones. La diferencial de x tiene que considerarse como teniendo la misma dimensión que x, y lo mismo para y. La dimensión de un producto es entonces la suma de las dimensiones de sus factores, y una expresión

$$M\,dx + N\,dy$$

se considera como homogénea si es una suma de términos que son todos de una misma dimensión.

Así, la ecuación

$$(xy^2 - 3y)\,dx - x\,dy = 0,$$

es homogénea si consideramos x como siendo de dimensión 1 e y como de dimensión —1, pues entonces es una suma de términos que tiene cada uno como dimensión cero.

Para resolver una ecuación que es homogénea cuando se supone x de dimensión 1 e y de dimensión n, hagamos

$$y = vx^n.$$

La nueva ecuación en v y x será entonces separable.

Así, en la ecuación anterior, hagamos

$$y = \frac{v}{x}, \quad dy = \frac{x\,dv - v\,dx}{x^2}.$$

Entonces la ecuación se convierte en

$$\left(\frac{v^2}{x} - \frac{3v}{x}\right)dx - x\left(\frac{x\,dv - v\,dx}{x^2}\right) = 0.$$

Esta ecuación se reduce a

$$\frac{dx}{x} - \frac{dv}{v^2 - 2v} = 0$$

que tiene como solución

$$2\ln x + \ln v - \ln(v - 2) + \ln c = 0,$$

o sea

$$\frac{v - 2}{v} = cx^2.$$

Por consiguiente

$$v = \frac{2}{1 - cx^2},$$

y, finalmente,

$$y = \frac{v}{x} = \frac{2}{x(1 - cx^2)}.$$

Se observará que con las dimensiones asignadas a x e y la cantidad v determinada por la igualdad

$$y = vx^n$$

es de dimensión cero. Esto es lo único que hay de importante en la sustitución, pues si expresamos y en función de x y cualquier otra cantidad v de dimensión cero, la ecuación diferencial será entonces separable.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$(1 + x^2y + x^4y^2)\,dy + 2x^3y^3\,dx = 0.$$

Esta ecuación es homogénea si suponemos que y es de dimensión 1 y x de dimensión $-\frac{1}{2}$. Sin embargo, puesto que x entra

sólo bajo la forma x^2 y su diferencial $2x\,dx$, es más sencillo adoptar para x^2 la dimensión -1, esto es,

$$x^2 = \frac{v}{y}, \quad 2x\,dx = \frac{y\,dv - v\,dy}{y^2}.$$

La ecuación se convierte entonces en

$$(1 + v + v^2)\,dy + vy^2\left(\frac{y\,dv - v\,dy}{y^2}\right) = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{y} + \frac{v\,dv}{1 + v} = 0.$$

La solución de esta ecuación es

$$\ln y + v - \ln(1 + v) = \ln c$$

o sea

$$ye^v = c(1 + v).$$

Pero $v = x^2y$, y por lo tanto, finalmente

$$ye^{x^2y} = c(1 + x^2y).$$

EJERCICIOS

152. $xy^2\,dy - (x^3 + y^3)\,dx = 0.$

153. $(x - y)\,dx - 2x\,dy = 0.$

154. $(x^2 - xy)\,\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$

155. $(x^2 - xy)\,dy + (x^2 - xy + y^2)\,dx = 0.$

156. $(3xy - 2x^2)\,\frac{dy}{dx} + (xy - 2y^2) = 0.$

157. $(y^2 - xy - x^2)\,dx + x^2\,dy = 0.$

158. $(x^2y + 2y^3)\,dx - (2x^3 + 3xy^2)\,dy = 0.$

159. $2x^3\,\frac{dy}{dx} + (y^3 - x^2y) = 0.$

160. $y^2\,dx + (x\sqrt{y^2 - x^2} - xy)\,dy = 0.$

161. $(x^2y - xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + x^2y + xy^2)\,dy = 0.$

162. $(1 - xy^2)\,dx - 2x^2y\,dy = 0.$

163. $x^2(1 - xy)\,\frac{dy}{dx} + (1 + xy - x^2y^2) = 0.$

164. $(2y^2 - 3x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

165. $(y^2 - 3x^2y)\,dx + x^3\,dy = 0.$

166. $2(xy^2 + 1)\,dy + y^3\,dx = 0.$

167. $(1 - x^2y)\,\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0.$

168. $y(3 - xy)\,dx + x(2 - xy)\,dy = 0.$

169. $(x + 2x^2y)\,dy + (2y + 3xy^2)\,dx = 0.$

170. $(x^2y + x)\,\frac{dy}{dx} + (xy^2 - y) = 0.$

171. $(x^2 - 2y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0.$

22. Ecuaciones de grado superior al primero.—El grado de una ecuación diferencial es el mayor exponente de la derivada más alta que contiene, después que la ecuación se ha simplificado quitando los denominadores y los radicales que contengan las derivadas. Así,

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 1 + \frac{dy}{dx}$$

son ecuaciones de segundo grado. Las ecuaciones que se han presentado y resuelto hasta este momento han sido principalmente de primer grado.

En las ecuaciones de primer orden y de grado superior es conveniente representar la derivada con una sola letra

$$p = \frac{dy}{dx}. \tag{20}$$

Efectuando esta sustitución la primera ecuación anterior se transforma en

$$p^2y - 2xp + y = 0. \tag{21}$$

En la mayoría de los casos esas ecuaciones se resuelven despejando el valor de p. Las ecuaciones de primer grado resultantes pueden tratarse por los medios anteriormente estudiados. Así, de la ecuación (21) obtenemos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y}.$$

que es una ecuación homogénea.

Un segundo método consiste en despejar el valor de y. La ecuación resultante

$$y = f(x, p) \tag{22}$$

puede diferenciarse con respecto a x dando

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

que es una ecuación de primer grado en las variables p y x. Su solución

$$p = F(x, c)$$

juntamente con (22) pueden considerarse como ecuaciones paramétricas de las curvas integrales, o bien, eliminando el parámetro p puede obtenerse la solución final en función únicamente de x, y, c.

Un tercer método es despejar el valor de x. La ecuación resultante

$$x = \phi(y, p)$$

puede diferenciarse con respecto a y, dando

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden en las variables y y p. Su solución y la ecuación diferencial inicial, pueden considerarse como ecuaciones paramétricas de las curvas integrales, o eliminando p puede obtenerse una solución que contenga únicamente a x, y y una constante de integración.

Ejemplo 1. Sea la ecuación

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por p se convierte en

$$xyp^2 + (y^2 - x^2)p - xy = 0.$$

Despejando de esta ecuación de segundo grado el valor de p resulta

$$p = \frac{x^2 - y^2 \pm \sqrt{(y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}}{2xy} = \frac{(x^2 - y^2) \pm (x^2 + y^2)}{2xy}$$

De aquí se deducen las dos ecuaciones siguientes

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)}{2xy} = \frac{x}{y},$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)}{2xy} = -\frac{y}{x}.$$

cuyas soluciones son

$$y^2 - x^2 = c,$$

$$xy = c,$$

cada una de las cuales es una solución de la ecuación diferencial dada. Si esto ocurriera en un problema real, sería nece-

sario determinar si ambas soluciones, o sólo una de ellas, satisfacía las condiciones del problema.

Ejemplo 2. Sea la ecuación

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Esta ecuación se denomina *de Clairaut.* Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por p se convierte en

$$y = xp + f(p). \tag{23a}$$

Utilizando el segundo método antes descrito, diferenciamos con respecto a x y obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx},$$

en la que $f'(p)$ es la derivada de $f(p)$ con respecto a p. Pasando p al primer miembro y simplificando se obtiene

$$[x + f'(p)]\frac{dp}{dx} = 0. \tag{23b}$$

Esta ecuación se satisface para cada una de las condiciones siguientes

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

$$x + f'(p) = 0.$$

La primera da $p = c$, y por consiguiente según (23a)

$$y = cx + f(c) \tag{23c}$$

que representa un sistema de líneas rectas. La segunda, juntamente con (23a), determina una sola curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left.\begin{aligned} y &= px + f(p), \\ x &= -f'(p). \end{aligned}\right\} \tag{23d}$$

En el punto en que $p = c$, la tangente a esta curva viene dada por la ecuación (23c). La solución completa consiste, pues, en la curva dada por la ecuación (23d) y todas sus tangentes representadas por la ecuación (23c).

Ejemplo 3. Sea la ecuación

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Cuando $\frac{dy}{dx}$ se sustituye por p, se obtiene la ecuación

$$yp^2 - 2xp + y = 0. \tag{24a}$$

Utilizando el tercer método antes indicado, despejaremos el valor de x

$$x = \frac{y(1+p^2)}{2p}.$$

Diferenciando con respecto a y, se obtiene

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1+p^2}{2p} + \frac{y(p^2-1)}{2p^2}\frac{dp}{dy},$$

efectuando operaciones y sacando factor común

$$\frac{p^2-1}{2p^2}\left[p + y\frac{dp}{dy}\right] = 0.$$

Esta ecuación se satisface para

$$p = \pm 1 \tag{24b}$$

o bien para

$$p + y\frac{dp}{dy} = 0. \tag{24c}$$

Esta última ecuación da

$$py = c.$$

Eliminando p de esta ecuación y la $(24a)$, se obtiene

$$y^2 = 2cx - c^2 \qquad (24d)$$

como solución principal. De $(24b)$ y $(24a)$ se deduce que las rectas dadas por la ecuación

$$y = \pm x \qquad (24e)$$

son también soluciones de la ecuación.

23. Interpretación geométrica.—Una ecuación de primer orden y de primer grado determina una sola pendiente en cada punto y, por consiguiente, solamente pasa una curva por ese punto. Una ecuación de segundo grado determina en general dos pendientes y, por consiguiente, pasan dos curvas por cada punto. El grado de una ecuación de primer orden indica así el número de curvas que pasan por un punto, aunque es posible que no sean todas distintas o reales.

Si a partir de un punto construimos la curva que en cada uno de sus puntos tenga una pendiente dada por una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, obtenemos una curva integral de la ecuación dada. En el caso de una ecuación de grado más elevado habrá, en general, puntos en los que dos o más de las pendientes coinciden. Las curvas integrales son entonces tangentes y se hace difícil determinar cual de ellas es la que queremos hallar.

Así, en el caso de la ecuación $(24a)$ las dos pendientes en cada punto, esto es,

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y},$$

se distinguen por los signos positivo y negativo que anteceden al radical. Si el radical no es nulo, esas pendientes son diferentes. A lo largo de las rectas

$$y = x \quad \text{e} \quad y = -x$$

las pendientes son, sin embargo, iguales y las curvas son tangentes. Como puede verse en la figura 8, esas rectas son tangentes en cada punto a las curvas integrales. En este caso, como la ecuación diferencial señala una propiedad de la tangente y estas rectas satisfacen a la ecuación diferencial propuesta, son soluciones especiales de la ecuación dada.

La solución general de la ecuación es

$$y^2 = 2cx - c^2,$$

tal como se dió en $(24d)$. Las ecuaciones $y = x$ e $y = -x$ de

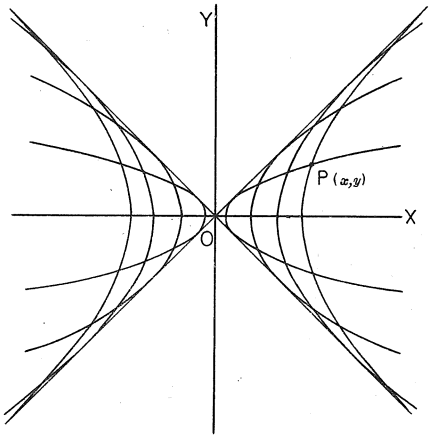

Fig. 8

$(24e)$, soluciones de la ecuación dada, no pueden obtenerse asignando valores particulares a la constante c, y se denominan *integrales singulares*.

Una ecuación de grado superior al primero puede, pues, tener dos tipos de soluciones. La integral general que contiene una constante de integración y representa, por consiguiente, un número infinito de curvas. Además puede haber un lugar geométrico, al que se da el nombre de *curva envolvente*, forma-

da por los puntos de contacto con todas estas curvas. Si esta envolvente no es una de las curvas, su ecuación es una integral singular.

En la mayoría de los casos no resolvemos un problema único sino toda una clase de problemas con diversas condiciones iniciales. Así, si deseamos la curva descrita por el proyectil disparado por un cañón, hallamos el haz de curvas para todos los ángulos de elevación del cañón. La solución buscada está así representada por un número infinito de curvas y, por consiguiente, es la integral general.

EJERCICIOS

172. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - 2 = 0.$

173. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - x = 0$

174. $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + y^2.$

175. $\left(y + \frac{dy}{dx}x\right)^2 = 4x^2\frac{dy}{dx}.$

176. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+y)\frac{dy}{dx} + xy =$

177. $4x^2y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^3\frac{dy}{dx}.$

178. $4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$

179. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0.$

180. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$

181. $3xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y^2\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2 = 0.$

182. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x(y+1)\frac{dy}{dx} + x^2y = 0.$

183. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$

184. $\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$

185. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} + 4x = 0.$

186. $(x^2 - y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$

24. Cambio de variable.—Hemos resuelto las ecuaciones homogéneas mediante la sustitución

$$v = \frac{y}{x}$$

que significa un cambio de variable. Muchas veces es posible reducir una ecuación cualquiera a una forma más sencilla adoptando una función u como nueva variable o tomando dos funciones u y v como nuevas variables.

Dada una ecuación diferencial, la forma de sus términos puede sugerir una sustitución adecuada. Así, por ejemplo, si la variable y aparece únicamente en las combinaciones y^2 e $y\frac{dy}{dx}$, mediante la sustitución

$$y^2 = u, \quad y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{du}{dx}$$

puede obtenerse una ecuación más sencilla.

Si la ecuación es resultado del planteamiento de un problema, pueden sugerirse como variables convenientes cantidades que desempeñen un papel importante en el enunciado del problema. Al establecer la ecuación diferencial suele ser preferible elegir como ejes de coordenadas los que mejor se adapten a las condiciones del problema y no escoger arbitrariamente este sistema de referencia. Así, en un problema de dos variables, cuya gráfica es una figura plana, si existe sime-

tría con respecto a una línea particular se sugiere ésta como un eje de coordenadas, y si existe simetría con respecto a un punto puede escogerse éste como origen de coordenadas polares. La elección de variables apropiadas simplifica notablemente el proceso de establecer la ecuación diferencial y se obtiene su solución más fácilmente sin más cambios de variables.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$(x - y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2.$$

La forma de la ecuación, respecto la cantidad $x - y$ sugiere la sustitución

$$x - y = u.$$

De ella se deduce, derivando con respecto a x,

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx},$$

y sustituyendo estos valores, la ecuación diferencial se convierte en

$$u^2\left(1 - \frac{du}{dx}\right) = a^2,$$

$$u^2 - a^2 = u^2 \frac{du}{dx},$$

que es de variables separables. La solución es

$$x = u + \frac{a}{2} \ln \frac{u - a}{u + a} + c.$$

Reemplazando u por $x - y$, tenemos finalmente,

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{x - y - a}{x - y + a} + c.$$

25. Ecuaciones simultáneas.—Las ecuaciones que hemos resuelto han contenido siempre dos variables, una de las cuales puede considerarse independiente, la otra dependiente. En las ecuaciones simultáneas que contienen una sola variable independiente y tantas variables dependientes como ecuaciones, puede ser posible eliminarlas todas menos una, resolver para ésta, y, sustituyendo en las otras ecuaciones, completar la solución. Un caso muy común es el representado por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, t), \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y, t)$$

En este caso de la primera ecuación, que contiene sólo dos variables, puede despejarse el valor de x en función de t. Este valor se sustituye en la segunda ecuación que puede resolverse para y.

Ejemplo. Sean las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x, \quad \frac{dy}{dt} = k_2 (x - y).$$

De la primera ecuación que contiene solamente x y t puede despejarse el valor de x, dando

$$x = c_1 e^{k_1 t}. \tag{a}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, tenemos

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_2 c_1 e^{k_1 t},$$

ecuación lineal en y cuya solución es

$$y = c_2 e^{-k_2 t} + \frac{k_2 c_1}{k_1 + k_2} e^{k_1 t}. \tag{b}$$

Las ecuaciones (a) y (b), conteniendo dos constantes de integración c_1 y c_2 constituyen la solución.

EJERCICIOS

187. $(x + y - 1)\,dx + (2x + 2y - 3)\,dy = 0$.

188. $3y^2 \dfrac{dy}{dx} - y^3 = x$.

189. $(1 - xy \cos xy)\,dx - x^2 \cos xy\, dy = 0$.

190. $xy\, dy = (y^2 + x^3)\,dx$.

191. $ev\left(\dfrac{dy}{dx} - 1\right) = e^x$.

192. $\left(x^2 \operatorname{sen} \dfrac{y}{x^2} - 2y \cos \dfrac{y}{x^2}\right)dx + x \cos \dfrac{y}{x^2}\, dy = 0$.

193. $\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}}\, dy = 0$.

194. $x\, dy = (xy + e^x - y)\,dx$.

195. $ye^{\frac{x}{y^2}}\, dx + \left(y^2 - 2xe^{\frac{x}{y^2}}\right)dy = 0$.

196. $x \cos y\, dy + (2 \operatorname{sen} y - 3x)\,dx = 0$.

197. $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x$.

198. $\dfrac{dx}{dt} + y = x, \qquad \dfrac{dy}{dt} = 3y$.

199. $2tx\, dx + (t^2 - x^2)\,dt = 0, \qquad \dfrac{dy}{dt} + x^2 = 2t^2$.

200. $t \dfrac{dx}{dt} + 2x = x^2 t, \qquad x\, dy = t\, dt$.

201. $t\, dx + (2x - 3t)\,dt = 0, \qquad dy - 2t(2xt + 1)\,dt = 0$.

202. $dx - 2y\, dt = 0, \qquad dy - (y + e^t)\,dt = 0$.

203. $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{6}{y} + 2t, \qquad t^2 \dfrac{dy}{dt} = 2ty + t^2 y^2$.

204. $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{x - y} = dt$.

EJERCICIOS DIVERSOS

205 $y\, dx - x \ln x\, dy = 0$.

206. $x \dfrac{dy}{dx} + y = x^2$.

207. $(y - x)\,dy + dx = 0$.

208. $\sqrt{y^2 - x^2}\, dx = x\, dy - y\, dx$.

209. $(2x + y)\,dx + (x - 2y)\,dy = 0$.

210. $x^2 \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3$.

211. $x^2 \dfrac{dy}{dx} - 2xy = 3y$.

212. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\, dy = 0$.

213. $x(x - 1)\,dy + (y - 2x^3)\,dx = 0$.

214. $x \dfrac{dy}{dx} + (x - 1)\,y = x^2(x + 1)$.

215. $x\, dy = (y + x\sqrt{x^2 + y^2})\,dx$.

216. $(xy + x^2)\,dy + y^2\, dx = 0$.

217. $y\sqrt{4x^2 - y^2}\, dx = 2xy\, dx - 2x^2\, dy$.

218. $(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\, dy + (x^3 + 3xy\sqrt{x^2 - 1})\,dx = 0$.

219. $(x - \operatorname{sen}^3 y)\,dy = \operatorname{sen} y \cos y\, dx$.

220. $(2 - x^2 y)\,dy - 2xy^2\, dx = 0$.

221. $2x(x + 1)\,dy + (xy + 2y - x - 1)\,dx = 0$.

222. $(2xy^2 - y)\,dx + x\, dy = 0$.

223. $yev\, dx = (y^3 + 2xev)\,dy$.

224. $(\operatorname{sen} x + y)\,dy + (y \cos x - x^2)\,dx = 0$.

225. $y \dfrac{dy}{dx} + y^2 \operatorname{ctg} x = \cos x$.

226. $ev\left(\dfrac{dy}{dx} + 1\right) = e^x$.

227. $x^2 \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - y(x^2 + y^2) \dfrac{dy}{dx} + y^4 = 0$.

228. $(a^2 - x^2) \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy \dfrac{dy}{dx} + b^2 - y^2 = 0$.

229. $t \dfrac{dx}{dt} + (x + y) = 0, \qquad t \dfrac{dy}{dt} - y = \sqrt{t^2 + y^2}$.

230. $\dfrac{dx}{dt} = x - t, \qquad \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 1 - 2t$.

PROBLEMAS

231. En un circuito de corriente alterna de intensidad i, con autoinducción L y resistencia R, la fuerza electromotriz (f. e. m.) es igual a Ri más $L\,\frac{di}{dt}$. En una corriente alterna, a través de un circuito de resistencia R y autoinducción L, el valor de la f. e. m. se calcula mediante una serie, basándose los cálculos suponiendo que

$$e = E \operatorname{sen}(\omega t),$$

siendo E y ω constantes. Hallar la intensidad de la corriente y el tiempo t si $i = 0$ cuando $t = 0$.

232. Una fuerza electromotriz

$$e = E \operatorname{sen}(\omega t)$$

actúa sobre un circuito que contiene una resistencia R y una capacidad C en serie. Suponiendo que el condensador se descargue al principio, la f. e. m. en los extremos del circuito en el tiempo t es

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt.$$

Si se supone que $i = 0$ cuando $t = 0$, hallar i en función de t.

233. Dos circuitos de resistencia R_1 y R_2 e inductancia L_1 y L_2, respectivamente, están conectados en paralelo entre los cables de una línea de transmisión. La corriente total que reciben es

$$i = I \operatorname{sen}(\omega t),$$

en la que I y ω son constantes. Calcular la corriente en cada circuito y la f. e. m. entre los cables suponiendo que ambas corrientes son cero cuando $t = 0$.

234. Por una resistencia de R ohmios que tienen una capacidad calorífica de C calorías por grado centígrado pasa una corriente de I amperios. Suponiendo que el calor se pierde con una rapidez igual a k veces la diferencia entre su temperatura T y la del aire T_0, hallar la temperatura de la resistencia en función del tiempo (cf. Problema 73, página 32).

235. Usando coordenadas rectangulares, hallar la forma de un reflector tal que la luz procedente de un punto fijo sea reflejada paralelamente a una recta fija.

236. Hallar las trayectorias ortogonales del sistema de círculos

$$y^2 + x^2 = 2cy.$$

237. Hallar el sistema de curvas ortogonales a

$$y^2 - x^2 = 2cy.$$

238. Hallar el haz de curvas ortogonales a

$$y = x + 1 + ce^x.$$

239. Demostrar que el haz de curvas

$$x^2 = 2cy + c^2$$

es ortogonal con respecto a sí mismo.

240. En cada punto $P\,(x, y)$ de una curva, el ángulo formado por la tangente y la ordenada es dividido en dos partes iguales por la recta que une P con el origen. Hallar la ecuación de la curva.

241. La tangente en un punto $P\,(x, y)$ de una curva es bisectriz del ángulo formado por la ordenada y la recta que une P con el origen. Hallar la ecuación de la curva.

242. Haciendo girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje de las x se engendra una superficie de revolución. Hallar la ecuación de la curva si el volumen limitado por la superficie y dos planos perpendiculares a su eje es proporcional al área de la superficie comprendida entre esos dos planos.

243. Cuando la ecuación de una recta viene dada bajo la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

las cantidades a y b son los segmentos que determina sobre los ejes coordenados. Demostrar que la tangente a una curva determina sobre los ejes los segmentos

$$a = x - \frac{y}{p}, \qquad b = y - px,$$

siendo p la pendiente y (x, y) el punto de tangencia. Partiendo de aquí, demostrar que cualquier ecuación

$$f(a, b) = 0$$

satisfecha por los valores a y b correspondientes a las tangentes a una curva, es una ecuación diferencial de la forma de la de Clairaut (cf. Ejemplo 2, página 70).

244. La tangente a una curva y los ejes coordenados forman un triángulo de área constante a^2. Hallar la ecuación de la curva.

245. Hallar la ecuación de la curva tal que el segmento de tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante a.

246. Entre dos anillos circulares situados en planos paralelos, cuyos centros se hallan en una perpendicular a sus planos, se extiende una película de jabón. Considerando la tensión superficial como una fuerza tangencial constante T por unidad de longitud en cualquier trayectoria en la superficie y despreciando el peso de la película, hallar su forma geométrica.

247. Un tanque contiene 378,54 litros de salmuera en la que hay disueltos 22,680 Kg de sal. En el tanque entra agua a razón de 11,356 litros por minuto y sale luego en igual cantidad pasando a un segundo tanque de 378,54 litros inicialmente lleno de agua pura. ¿Qué cantidad de sal habrá en este segundo tanque al cabo de 1 hora?

248. En una reacción química se descompone una substancia c en dos substancias x e y, siendo la velocidad con que se forman esos dos productos proporcional a la cantidad presente de c. Si al principio $c = 1$, $x = 0$, $y = 0$ y al cabo de una hora $c = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{8}$, $y = \frac{3}{8}$ hallar x e y en función del tiempo.

249. En cierta reacción química se produce una molécula de y por cada molécula de x consumida, siendo la rapidez de la reacción proporcional a la cantidad de sustancia presente de x. Si al mismo tiempo, mediante una reacción inversa, y se convierte en x con una rapidez proporcional a la cantidad presente de y, y el análisis químico mostró que

$$t = 0,\ 3,\ \infty$$
$$x = 10,\ 6,\ 5{,}5$$
$$y = 0,\ 4,\ 4{,}5.$$

Hallar x e y en función de t.

250. Las sustancias radioactivas se transforman con una rapidez proporcional a la cantidad de sustancia presente. La descomposición de una molécula de radio B produce una molécula de radio C, siendo la rapidez de la descomposición tal que la mitad del radio B desaparece en 27 minutos. Análogamente, el radio C, se descompone con una rapidez tal que en 19,5 minutos se pierde la mitad de él. Si inicialmente está presente una molécula de radio B, hallar las cantidades de radio B y C al cabo de 1 hora.

251. Supongamos que las bacterias crecen con una rapidez proporcional al número de ellas presente, pero que producen toxinas que las

destruyen con una rapidez proporcional al número de bacterias y a la cantidad de toxinas. Supongamos además que la rapidez de producción de las toxinas es proporcional al número de bacterias vivas. Demostrar que el número aumenta hasta un máximo y luego disminuye a cero y que en el tiempo t su número lo da la ecuación

$$N = \frac{4M}{(ekt + e^{-kt})^2},$$

en la que M es el número máximo y t se mide a partir del momento en que N pasa por un máximo.

CAPITULO III

TIPOS ESPECIALES DE ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

26. Teoría general.—Una ecuación diferencial de segundo orden en dos variables (x independiente e y dependiente) tiene la forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \qquad (25)$$

Considerando como incógnita la segunda derivada, y resuelta la ecuación, se obtienen una o más ecuaciones de la forma

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

En general, estas ecuaciones se resuelven transformándolas en una ecuación diferencial exacta

$$\frac{d}{dx}u\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

cuya solución es

$$u\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = c_1. \qquad (26)$$

Esta es una ecuación de primer orden que, resuelta para y, da

$$y = F(x, c_1, c_2). \qquad (27)$$

La resolución de una ecuación de segundo orden exige, pues, dos integraciones, y, por consiguiente, la integral general contiene dos constantes de integración. En (26) podríamos sustituir valores arbitrarios para x, y, $\frac{dy}{dx}$ y hallar c_1, sustituir luego esos valores de x, y, c_1 en (27) y hallar c_2. En los casos más sencillos por cada punto pasan un número infinito de curvas integrales, correspondiendo a cada una una pendiente distinta. En los casos más complicados cuando (25), por ejemplo, es de un grado más elevado, puede haber varias curvas que pasen por el mismo punto con la misma tangente, y en algunos puntos todas estas curvas o algunas de ellas pueden ser imaginarias.

Las constantes c_1, c_2 de (27) se denominan independientes si no es posible reducir esta ecuación a la forma

$$y = f(x, c),$$

en la que c es alguna función de c_1 y c_2. Así, si

$$y = x^2 + c_1 + c_2,$$

las constantes no son independientes, pues reemplazando $c_1 + c_2$ por c esta ecuación puede escribirse

$$y = x^2 + c,$$

que contiene únicamente una constante en lugar de dos.

La integral general de una ecuación diferencial de segundo orden contiene dos constantes independientes de integración.

27. Ecuaciones inmediatamente integrables.—Una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \qquad (28)$$

puede resolverse directamente por medio de dos integraciones. La primera integración da

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx = f_1(x) + c_1,$$

en la que $f_1(x)$ es la función obtenida integrando $f(x)\,dx$. Una segunda integración da la integral general en la forma

$$y = \int [f_1(x) + c_1]\,dx = f_2(x) + c_1 x + c_2.$$

28. Ecuaciones que no contienen y.—Una ecuación de segundo orden en la que no aparece y directamente sino sólo en las derivadas, puede resolverse para la segunda derivada y reducirse así a la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right). \tag{29}$$

Adoptemos como nueva variable

$$p = \frac{dy}{dx}. \tag{30}$$

Entonces

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

y, por consiguiente, la ecuación (29) puede escribirse

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Esta es una ecuación de primer orden en las variables x, p con una solución de la forma

$$p = F(x, c_1),$$

siendo c_1 la constante de integración. Sustituyendo p por $\frac{dy}{dx}$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = F(x, c_1),$$

de donde

$$y = \int F(x, c_1)\,dx + c_2.$$

Ejemplo. Sea la ecuación

$$(1 + x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0.$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por p, tenemos

$$(1 + x)\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Esta es una ecuación diferencial exacta cuya solución es

$$(1 + x)\,p = c_1.$$

Reemplazando p por $\frac{dy}{dx}$ y separando las variables

$$dy = \frac{c_1\,dx}{1 + x},$$

de donde se deduce la integral general

$$y = c_1 \ln (1 + x) + c_2.$$

29. Ecuaciones que no contienen x.—Una ecuación que no contiene directamente x puede reducirse a la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{31}$$

Para su resolución hagamos la siguiente sustitución

$$\frac{dy}{dx} = p \tag{32}$$

y escribamos la segunda derivada en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \tag{33}$$

Esas sustituciones hacen que (31) adopte la forma

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Esta es una ecuación de primer orden que puede resolverse para p. Luego se reemplaza p por $\frac{dy}{dx}$, obteniéndose una ecuación de primer orden que puede resolverse separando las variables.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = y^2\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Sustituyendo

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy},$$

la ecuación se convierte en

$$yp\frac{dp}{dy} = y^2p + p^2.$$

Dividiendo por p,

$$y\frac{dp}{dy} = y^2 + p.$$

La solución de esta ecuación es

$$\frac{p}{y} = y + c_1,$$

de donde

$$p = \frac{dy}{dx} = y(y + c_1),$$

y la integral general será

$$x = \int\frac{dy}{y(y + c_1)} = \frac{1}{c_1}\ln\frac{y}{y + c_1} + c_2.$$

30. Ecuaciones lineales de segundo orden. — Una ecuación de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\,y = f_3(x), \tag{34}$$

esto es, una ecuación de primer grado en y y sus derivadas, es una ecuación lineal. El caso especial en que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son constantes se trata en el capítulo siguiente.

En general, una ecuación lineal con coeficientes variables $f_1(x)$ y $f_2(x)$ no puede ser resuelta por nuestros métodos actuales. Sin embargo, a menudo se conoce una integral, o solución particular de la ecuación abreviada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\,y = 0 \tag{35}$$

o puede hallarse por tanteo. Si $y = u$ es una integral de esta clase, esto es, si

$$\frac{d^2u}{dx^2} + f_1(x)\frac{du}{dx} + f_2(x)\,u = 0, \tag{36}$$

la sustitución

$$y = uv$$

reduce la ecuación original (34) a una forma que no contiene directamente v. Esta ecuación puede resolverse por el método del Artículo 28, y luego

$$y = uv$$

es la solución buscada. Cuando la ecuación diferencial se presenta en la solución de un problema, la función u puede obtenerse a menudo resolviendo algún caso sencillo del mismo problema.

Para mostrar el efecto de la sustitución, reemplacemos y en (34) por uv. Después de agrupar los términos, la ecuación se convierte en

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + \left[uf_1(x) + 2\frac{du}{dx}\right]\frac{dv}{dx} + \left[\frac{d^2u}{dx^2} + f_1(x)\frac{du}{dx} + f_2(x)\,u\right]v = f_3(x).$$

Según (36) el coeficiente de v es cero y, por consiguiente,

$$u\frac{d^2v}{dx^2} + \left[uf_1(x) + 2\frac{du}{dx}\right]\frac{dv}{dx} = f_3(x).$$

Puesto que u es una función conocida de x, la sustitución

$$\frac{dv}{dx} = p$$

la reduce a una ecuación lineal y de primer orden con relación a p.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x^2.$$

La ecuación abreviada es

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Para hallar una integral particular ensayemos

$$y = x^m.$$

Esta sustitución da

$$(m^2 - 2m + 1)\,x^m = 0,$$

que se satisface si

$$m^2 - 2m + 1 = 0,$$

esto es, si $m = 1$. La integral particular es, pues, $y = x$. Sustituyendo

$$y = xv$$

la ecuación original se convierte en

$$x^3\frac{d^2v}{dx^2} + x^2\frac{dv}{dx} = x^2.$$

La solución de esta ecuación es

$$v = x + c_1 \ln x + c_2,$$

de donde, la integral será

$$y = xv = x^2 + c_1x \ln x + c_2x.$$

31. Ecuaciones homogéneas.—Una ecuación diferencial es homogénea si sus términos son todos del mismo grado o dimensión. Según las dimensiones que se asignen a x e y, una ecuación puede ser homogénea de varias maneras.

Si se considera x de dimensión 1 e y de dimensión cero, $\frac{dy}{dx}$ es de dimensión -1 y $\frac{d^2y}{dx^2}$ de dimensión -2. Una ecuación del tipo

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0, \qquad (37)$$

que es homogénea cuando se asignan las dimensiones de esta manera, puede decirse que es homogénea en x. Si sustituimos

$$x = e^t,$$

hallamos

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right].$$

El segundo miembro de cada una de esas ecuaciones tiene el factor e^t elevado a una potencia igual a la dimensión de la cantidad del primer miembro. Debido a la homogeneidad, cuando se sustituyen esos valores en (37) las potencias de e^t desaparecerán dejando una ecuación de la forma

$$F\left(y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0.$$

Puesto que esta ecuación no contiene explícitamente la variable t, puede tratarse por el método del artículo 29.

Análogamente, si una ecuación es homogénea en y, la sustitución

$$y = e^t$$

la transforma en otra que no contiene a t.

Si una ecuación es homogénea al considerar a x como de dimensión 1 y a y de dimensión n, la sustitución

$$y = vx^n$$

la reducirá a una forma homogénea en x.

Ejemplo. Sea la ecuación

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y\frac{dy}{dx}.$$

Esta ecuación es homogénea en x y también en y. Sustituyendo

$$x = e^t$$

se convierte en

$$y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2y\frac{dy}{dt}.$$

El método regular sería adoptar $\frac{dy}{dt}$ por nueva variable, pero puesto que ambos miembros son derivadas exactas con respecto a t, una primera integración da

$$y\frac{dy}{dt} = y^2 + c_1.$$

Separando las variables y haciendo una segunda integración se obtiene finalmente

$$y^2 + c_1 = c_2e^{2t} = c_2x^2.$$

EJERCICIOS

252. $\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x = 0.$

253. $x\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + x^2.$

254. $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0.$

255. $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

256. $(x + 1)\frac{d^2y}{dx^2} - (x + 2)\frac{dy}{dx} + x + 2 = 0.$

257. $\frac{d^2y}{dx^2} = y.$

258. $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0.$

259. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

260. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} = 0$.

261. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

262. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx} + a\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

263. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{a}{x}\dfrac{dy}{dx} + b\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$.

264. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3$.

265. $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = x$.

266. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^2$.

267. $(1 + x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x$.

268. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = 1$.

269. $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2} = (x - 2y)\left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)$.

270. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} = y\dfrac{dy}{dx}$.

32. Flechas de las vigas.—En este estudio nos ocuparemos solamente de las vigas de sección transversal uniforme con eje horizontal, cuyo ancho y altura son pequeños en comparación de la longitud. Cuando una viga de esta clase se comba por la acción de fuerzas verticales, resulta que las secciones planas perpendiculares al eje permanecen planas y que las fibras paralelas al eje se doblan para formar curvas que son perpendiculares a esos planos. Las fibras situadas en el lado convexo se estiran, y las del lado cóncavo se comprimen.

Existe, pues, una superficie neutral en la que las fibras no están sometidas ni a la tensión ni a la compresión. Su intersección con un plano vertical que pase por el eje de la viga es una curva AB (fig. 9a) a la que se da el nombre de línea elástica. Para determinar la ecuación de esta curva hallaremos su radio de curvatura R en el punto $P(x, y)$.

Sea MN (fig. 9b) la sección producida por un plano que pasa por P y es perpendicular al eje de la viga, y sea CD su

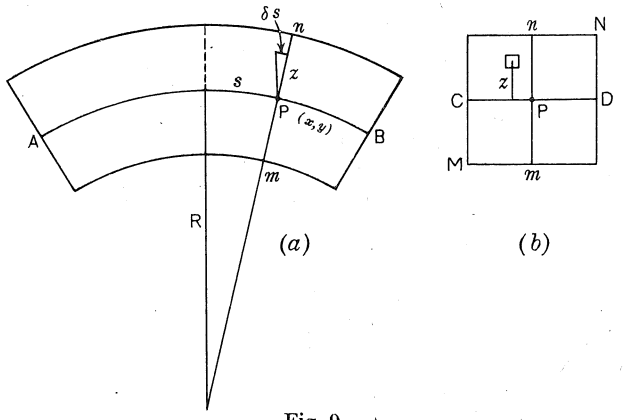

Fig. 9

intersección con la capa de fibras neutras. El alargamiento de una fibra de longitud natural s es

$$\delta_s = z\frac{s}{R},$$

en la que z es la distancia a la capa neutra. Según la ley de Hooke la tensión en esta fibra es

$$E\frac{\delta_s}{s}\,da = \frac{E}{R}\,z\,da,$$

en la que da es el área de su sección transversal y E el mó-

dulo de Young. Puesto que no existe ninguna tensión horizontal resultante, se verifica

$$\frac{E}{R}\int z\,da = 0.$$

Esto muestra que la línea CD pasa por el centro de gravedad de la sección. La línea elástica es, pues, la curva que forma al combarse el eje de la viga.

El momento con respecto a CD de las tensiones a través de la sección normal por P es

$$M = \frac{E}{R}\int z^2\,da = \frac{EI}{R}, \tag{38}$$

en la que I es el momento de inercia del área de la sección alrededor de ese eje.

Sean x, y las coordenadas de P, midiéndose x a lo largo de la viga e y verticalmente. Puesto que la pendiente suele ser muy pequeña,

$$\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

aproximadamente. Por consiguiente, la ecuación (38) puede escribirse

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M. \tag{39}$$

El valor de M, al que se da el nombre de momento flexor, es el momento con respecto a P de todas las fuerzas que actúan a un lado de P, dando lugar a momentos positivos las que actúan hacia arriba y a momentos negativos las que actúan hacia abajo. Para hallar la curva que forma una viga al combarse determinamos M en función de x y resolvemos la ecuación diferencial (39). En los problemas que examinamos

aquí, la viga se supone de un material uniforme, con una sección transversal constante. Por consiguiente, E e I son constantes.

Ejemplo. Hallar la flecha de una viga de longitud $2l$, que se apoya por sus extremos y está cargada con un peso w por unidad de longitud.

Tomemos el centro de la viga como origen de coordenadas (fig. 10). El peso total soportado es $2lw$ y, por consiguiente, el empuje hacia arriba de cada punto de apoyo en los extremos es lw. Consideremos las fuerzas a la derecha del punto $P(x, y)$. En el extremo existe un empuje hacia arriba igual a lw. Su momento con respecto a P es

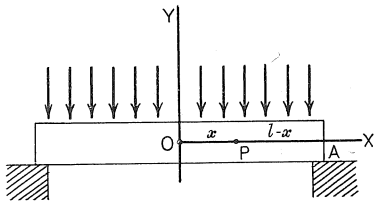

Fig 10

$$wl(l - x).$$

La única fuerza además de ésta que actúa sobre la sección PA es la carga $w(l - x)$ entre P y A. Puesto que la carga está uniformemente distribuída, esta fuerza puede considerarse como actuando en su centro de gravedad a la distancia $\frac{1}{2}(l - x)$ de P. Su momento es, pues,

$$-w(l - x)\cdot\tfrac{1}{2}(l - x),$$

usándose el signo negativo porque la fuerza actúa hacia abajo.

El momento total con respecto a P es

$$M = wl(l - x) - \tfrac{1}{2}w(l - x)^2 = \tfrac{1}{2}w(l^2 - x^2).$$

La ecuación diferencial es, pues,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \tfrac{1}{2}w(l^2 - x^2).$$

Una primera integración da

$$EI\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}w\left(l^2x - \frac{x^3}{3}\right) + c_1.$$

Puesto que la viga es horizontal en el centro, sustituímos los valores

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

y obtenemos así $c_1 = 0$. Una segunda integración da

$$EIy = \tfrac{1}{2}w\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right) + c_2.$$

Puesto que hemos tomado el origen sobre la curva neutral, $c_2 = 0$. La ecuación de la curva es, pues,

$$EIy = \tfrac{1}{2}w\left(\frac{l^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12}\right)$$

El alejamiento máximo de la viga con respecto al eje primitivamente recto, es

$$EIy = \tfrac{5}{24}wl^4$$

en el extremo, que corresponde a $x = l$. Este valor suele llamarse de ordinario flecha de la viga.

33. Equilibrio de un cable.—Sea ABC (fig. 11) un cable perfectamente flexible amarrado en A y C y cargado de una manera cualquiera. Tomemos como eje de las x una recta horizontal y como eje de las y la perpendicular que pasa por B, que es el punto más bajo de la curva. Examinemos la parte del cable comprendida entre B y el punto variable $P(x, y)$ de la curva. Esta parte está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas:

1. Una tensión horizonta H en B ejercida por la sección AB del cable.
2. Una tensión T a lo largo de la tangente en P debida a la parte PC del cable.
3. Una fuerza vertical de sentido descendente igual al peso W de la parte BP del cable.

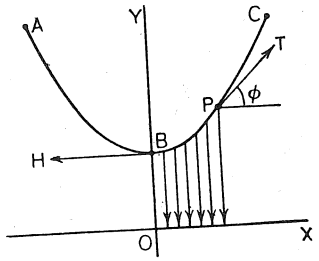

Fig. 11

Para que exista el equilibrio, la componente total de la fuerza hacia la derecha tiene que ser igual a la que actúa hacia la izquierda, y la componente que actúa hacia arriba igual a la que actúa hacia abajo.

Por consiguiente,

$$\left.\begin{aligned} T\cos\phi &= H, \\ T\operatorname{sen}\phi &= W. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera, tenemos

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{W}{H}. \tag{41}$$

Puesto que H es constante, si se conoce W en función de x, esta expresión puede integrarse en seguida. A veces no se conoce W, pero es fácil hallar sus derivadas. En este caso la diferenciación da

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx}. \tag{42}$$

La ecuación diferencial de la curva de cable se obtiene integrando (41) o (42). La solución contiene la constante H, que

puede obtenerse sustituyendo las coordenadas de los extremos de la curva, ya sean las coordenadas de B o la longitud total del cable.

Ejemplo. Suponiendo que la longitud de una cuerda elástica sea proporcional a la tensión, hallar la curva formada por esa cuerda cuando esté amarrada en sus extremos y cuelgue por su propio peso.

El enunciado significa que la sección transversal del cable es inversamente proporcional a la tensión, y, por lo tanto, su peso por unidad de longitud es

$$\frac{k}{T},$$

en la que k es constante. Por consiguiente,

$$W = \int \frac{k}{T}\, ds.$$

Puesto que

$$T \cos \Phi = H, \quad ds \cos \Phi = dx,$$

esta expresión se convierte en

$$W = \int \frac{k \cos \Phi\, ds}{T \cos \Phi} = \frac{k}{H} \int_0^x dx = \frac{k}{H} x.$$

Por consiguiente, la ecuación (41) es equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{kx}{H^2},$$

de donde

$$y = \frac{kx^2}{2H^2} + c,$$

que es la ecuación de una parábola. El valor de la constante c depende de la posición del eje de las x.

PROBLEMAS

271. Una viga de longitud $2l$ se apoya por sus extremos y está cargada con un peso W en el centro. Calcular la flecha.

272. Calcular la flecha de una viga voladiza de longitud l cuyo extremo empotrado es horizontal y en el otro está cargada con un peso W.

273. Calcular la flecha de una viga voladiza de longitud l empotrada en un extremo y cargada con un peso w por unidad de longitud.

274. Calcular la flecha de una viga de longitud $2l$ apoyada en sus extremos y en el punto medio, cargada con un peso w por unidad de longitud.

275. Calcular la flecha de una viga voladiza de longitud l empotrada en un extremo, apoyada en el otro, y cargada con un peso w por unidad de longitud. En este caso es necesario representar la fuerza que sostiene la viga en un extremo por un símbolo y después de integrar la ecuación diferencial hallar el valor de esta fuerza utilizando las condiciones satisfechas en los extremos.

276. Calcular la flecha de una viga de longitud $2l$ empotrada en sus dos extremos y cargada con un peso w por unidad de longitud.

277. El cable de suspensión de un puente colgante soporta un peso w por unidad de distancia horizontal. Despreciando el peso del cable hallar la curva que forma.

278. Un cable uniforme está amarrado en sus extremos y cuelga por su propio peso. Hállese la ecuación de la curva que forma

279. Un alambre de telégrafo pesa 40,6 Kg por kilómetro. Suponiendo que los postes estén colocados a una distancia de 122 m unos de otros y que la flecha del alambre en el centro sea de 3 m, calcular la tensión en el punto más bajo del alambre.

280. De una cuerda cuelgan una serie de barras de longitud variable pero todas del mismo diámetro. Las distancias horizontales entre las barras consecutivas son iguales y sus extremos inferiores están todos sobre una línea recta horizontal. Suponiendo que estén tan cerca unas de otras que la carga pueda considerarse continua, hállese la curva formada por la cuerda.

34. Movimiento de un punto material sobre una recta.— Si F es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un punto de masa m, su aceleración a viene dada por la ecuación

$$F = ma. \tag{43}$$

Esta fórmula exige que la fuerza y la masa se midan en las unidades correspondientes. En el sistema c. g. s. la masa se mide en gramos y la fuerza en dinas, definiéndose esta última unidad como la fuerza que actuando sobre una masa de 1 gramo le imprime una aceleración de un centímetro por segundo segundo. En unidades inglesas la fuerza suele medirse en libras, siendo la libra la presión que ejerce por la gravedad el peso de la libra estándar al nivel del mar en la latitud 45° norte. La masa se expresa entonces en *slugs*, teniendo un cuerpo que pesa w libras una masa

$$m = \frac{w}{g} \text{ slugs},$$

en la que $g = 32{,}174$ pies por seg^2 es la aceleración de la gravedad en la localidad mencionada. A veces la masa se mide en libras. Entonces la fuerza se expresa en *poundals*.

$$1 \text{ libra-fuerza} = 32{,}174 \text{ poundals}.$$

La aceleración de la gravedad varía ligeramente según el lugar de la superficie de la Tierra que se considere, pero para la mayoría de los fines de la práctica no es necesario distinguir el valor local del valor estándar indicado más arriba.

Si un punto material se mueve sobre una recta y s es su distancia a un punto fijo de la misma (considerando sobre la recta los dos sentidos, positivo y negativo), su velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{44}$$

y su aceleración

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{45}$$

Al utilizar esas fórmulas puede tomarse como positiva una cualquiera de las direcciones a lo largo de la recta. Todas las cantidades F, s, v, a son entonces positivas si actúan en esa dirección y negativas cuando actúan en la dirección opuesta.

Ejemplo. Cuando un cuerpo se hunde poco a poco en un líquido la resistencia con que tropieza es, aproximadamente, proporcional a su velocidad. Considerando que el punto parte del reposo, hallar la ecuación de movimiento.

Sea s, que se considerará como positiva hacia abajo, la distancia que el cuerpo se sumerge en t segundos. Si m es su masa y g la aceleración de la gravedad, la fuerza de la gravedad es

$$mg,$$

que es positiva ya que está dirigida hacia abajo. La resistencia, que actúa hacia arriba y es proporcional a la velocidad es

$$-kv,$$

siendo positivos k y v. La resultante es, pues,

$$F = mg - kv.$$

De la ecuación (43) y de esta última, se deduce

$$mg - kv = ma = m\frac{dv}{dt}.$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$\ln (mg - kv) = -\frac{k}{m}t + c.$$

Para calcular el valor de la constante, observemos que cuando $t = 0$ se verifica $v = 0$ y, por lo tanto,

$$c = \ln (mg).$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior y pasando a exponenciales,

$$mg - kv = mge^{-\frac{kt}{m}}.$$

Puesto que $v = \frac{ds}{dt}$, la integración da

$$mgt - ks = -\frac{m^2g}{k}e^{-\frac{kt}{m}} + c.$$

Puesto que $s = 0$ cuando $t = 0$,

$$c = \frac{m^2g}{k}$$

Sustituyendo y despejando el valor de s, se obtiene finalmente

$$s = \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right) + \frac{mg}{k}t.$$

35. **Movimiento en un plano.**—Cuando un punto material de masa m se mueve en un plano o en el espacio su aceleración satisface todavía la ecuación

$$F = ma,$$

pero las cantidades F y a son vectores, esto es, tienen dirección y magnitud. Para obtener una ecuación en la que los términos sean números proyectamos sobre una línea. Si la componente de F a lo largo de esta línea es F_x y la componente de a a lo largo de la misma línea es a_x, entonces

$$F_x = ma_x.$$

Supongamos que el punto material se mueve sobre una curva plana. Sean (x, y) sus coordenadas rectangulares. Las componentes de la aceleración a lo largo de los ejes coordenados son

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Si F_x y F_y son las componentes de la fuerza a lo largo de los ejes, el movimiento del punto lo determinan entonces las ecuaciones

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y. \tag{46}$$

En algunos casos es más conveniente usar coordenadas polares. En este caso, cuando el punto se encuentra en P (figura 12) su velocidad se descompone en las componentes v_r a lo largo de la recta fija OP y v_θ a lo largo de la recta PQ perpendicular a OP. También la aceleración se descompone en las componentes a_r a lo largo de OP y a_θ a lo largo de PQ. Para hallar los valores de esas componentes diferenciaremos las fórmulas que dan las coordenadas x, y de P en función de las polares, o sea,

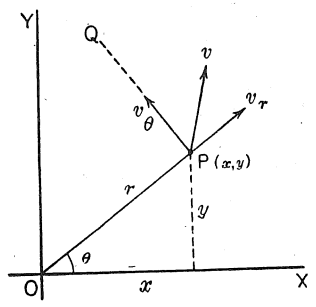

Fig. 12

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y obtenemos así

$$\frac{dx}{dt} = \cos\theta\frac{dr}{dt} - r\,\text{sen}\,\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \text{sen}\,\theta\frac{dr}{dt} + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos\theta\frac{d^2r}{dt^2} - 2\,\text{sen}\,\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\,\text{sen}\,\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \text{sen}\,\theta\frac{d^2r}{dt^2} + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\,\text{sen}\,\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

En el punto en que la curva corta el eje de las x ($\theta = 0$) esas son las componentes de la velocidad y la aceleración a lo largo del radio y de la perpendicular al mismo. Así,

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}, \tag{47}$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \quad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{48}$$

en ese punto. Puesto que el eje de las x pudiera haberse trazado por un punto cualquiera de la curva, esas ecuaciones son también válidas para cualquier posición de P sobre la curva.

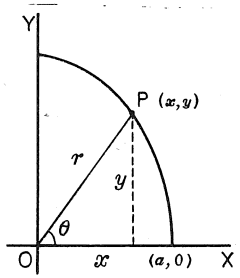

Fig. 13

Si la fuerza que actúa sobre el punto tiene las componentes F_r a lo largo de OP y F_θ perpendicular a OP, el movimiento del punto puede hallarse resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ma_r &= F_r, \\ ma_\theta &= F_\theta. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ejemplo 1. Un punto de masa m es atraido hacia el origen con una fuerza proporcional a la distancia. Si el móvil parte del punto $(a, 0)$ con una velocidad v_0 perpendicular al eje de las x, hallar la trayectoria descrita.

Al ocupar el punto la posición P (x, y) (fig. 13) la fuerza de atracción está dirigida a lo largo de OP y es numéricamente igual a kr, siendo r la distancia OP y k una constante. Las componentes de la fuerza son,

$$F_x = -kr\cos\theta = -kx,$$

$$F_y = -kr\,\text{sen}\,\theta = -ky,$$

utilizándose el signo negativo porque esas componentes son

negativas cuando x e y son positivas. La ecuación de movimiento (46) tiene, en este caso, la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

Puesto que cada una de esas ecuaciones contiene solamente una de las coordenadas, pueden resolverse independientemente. Si hacemos la sustitución

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v$$

y adoptamos a u y v como nuevas variables, tenemos

$$mu\frac{du}{dx} = -kx, \quad mv\frac{dv}{dy} = -ky,$$

de donde

$$u^2 + \frac{k}{m}x^2 = c_1, \quad v^2 + \frac{k}{m}y^2 = c_2.$$

Calculando las constantes por las condiciones $u = 0$, $v = v_0$ cuando $x = a$, $y = 0$, se obtiene

$$u^2 + \frac{k}{m}x^2 = \frac{k}{m}a^2, \quad v^2 + \frac{k}{m}y^2 = v_0^2.$$

Reemplazando u y v por $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{v_0^2 m}{k} - y^2}.$$

Integrando y determinando las constantes por la condición de ser $x = a$, $y = 0$ cuando $t = 0$, se obtienen las siguientes ecuaciones paramétricas de la trayectoria

$$x = a\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \quad y = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\,\text{sen}\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Esas ecuaciones expresan x e y en función del tiempo. Eliminando t, se obtiene para ecuación rectangular de la curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0^2 m}{k}\right)} = \cos^2\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + \operatorname{sen}^2\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right) = 1.$$

La trayectoria es, pues, una elipse cuyos semiejes son

$$a, \quad v_0\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Ejemplo 2. Un punto de masa m es atraído hacia el origen con una fuerza

$$\frac{mk^2}{r^3}.$$

Si el móvil parte del punto $(a, 0)$ con una velocidad $v_0 > \frac{k}{a}$, perpendicular al eje de las x, hallar la ecuación de la trayectoria descrita.

Utilizando coordenadas polares, la dirección positiva r es desde el origen hacia afuera. Por consiguiente, las componentes de la fuerza son

$$F_r = -\frac{mk^2}{r^3}, \quad F_\theta = 0.$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son, pues,

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -\frac{mk^2}{r^3},$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0.$$

La segunda ecuación equivale a

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

que puede integrarse inmediatamente dando

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = c_1.$$

Al principio

$$r = a, \quad r\frac{d\theta}{dt} = v_0.$$

Por consiguiente,

$$c_1 = av_0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{av_0}{r^2}.$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a^2v_0^2 - k^2}{r^3}.$$

Multiplicando por $\frac{dr}{dt}\,dt$,

$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\,dt = \frac{a^2v_0^2 - k^2}{r^3}\,dr,$$

de donde

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (a^2v_0^2 - k^2)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right),$$

pudiéndose determinar la constante de integración por la condición de ser $\frac{dr}{dt} = 0$ cuando $r = a$. Dividiendo por

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{a^2v_0^2}{r^4},$$

se obtiene

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{a^2v_0^2 - k^2}{a^4v_0^2}r^2(r^2 - a^2).$$

Resolviendo esta ecuación y determinando la constante por la

condición de ser $r = a$ cuando $\theta = 0$, obtenemos la ecuación de la curva en la forma

$$r = a \sec\left[\frac{\sqrt{a^2v_0^2 - k^2}}{av_0}\,\theta\right].$$

PROBLEMAS

281. Un punto de masa m es atraído hacia el origen con una fuerza igual a k veces la distancia. Suponiendo que parta del reposo a la distancia a hallar su ecuación de movimiento.

282. Un punto de masa m se mueve hacia un centro fijo que lo repele con una fuerza igual a k^2m veces su distancia al centro. Suponiendo que parte de la distancia a con una velocidad ka, demostrar que el punto se acercará continuamente al centro pero no lo alcanzará nunca.

283. Un punto de masa m se mueve en línea recta hacia un centro de fuerza que lo atrae con la magnitud

$$\frac{mk^2}{r^3},$$

siendo r su distancia al centro. Suponiendo que el punto parta del reposo a la distancia a, calcular el tiempo necesario para alcanzar al centro.

284. Hallar la velocidad adquirida por un cuerpo al caer desde una distancia infinita de la Tierra, suponiendo que la fuerza de atracción varía en razón inversa al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. La constante de proporcionalidad puede hallarse partiendo de la aceleración conocida g en la superficie de la Tierra.

285. Si se hiciera un agujero que pasara por el centro de la Tierra, un cuerpo que cayera por él sería atraído hacia el centro con una fuerza proporcional a la distancia. Calcular el tiempo necesario para llegar al centro.

286. Suponiendo que la resistencia del aire sea proporcional al cuadrado de la velocidad, y que la velocidad de un cuerpo que cae tienda hacia un valor límite V, hallar la ecuación de movimiento de un cuerpo que parte del reposo.

287. Un punto es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad v_0. Suponiendo que la resistencia del aire sea k veces el cuadrado de la velocidad, calcular la velocidad con que vuelve a la Tierra.

288. Un proyectil es disparado con una velocidad de 750 m/seg en una dirección que hace 45° con la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, hallar el punto más alto alcanzado y el punto en que llega al suelo.

289. Un proyectil es disparado con una velocidad v_0 y con un ángulo de elevación α. Suponiendo que la resistencia del aire sea kv siendo v la velocidad y k una constante, hallar las ecuaciones de movimiento.

290. Un punto material es repelido desde el origen con una fuerza proporcional a la distancia. Suponiendo que parta del punto $(a, 0)$ con una velocidad v_0 perpendicular al eje de las x, hallar la trayectoria descrita.

291. Un punto material de masa m es atraído hacia el origen con una fuerza

$$\frac{k^2m}{r^5}.$$

Suponiendo que parta del punto $(a, 0)$ con una velocidad

$$v_0 = \frac{k}{a^2\sqrt{2}}$$

perpendicular al eje de las x, hallar la trayectoria que describe.

292. Un punto material describe el círculo

$$r = a\cos\theta$$

con una velocidad constante. Demostrar que la fuerza que actua sobre él es constante en magnitud y está dirigida hacia el centro del círculo.

36. Dinámica de un sistema de puntos.—Si M es la masa total de un cuerpo o de un sistema de cuerpos y F la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre él, la ecuación

$$F = Ma \tag{50}$$

determina la aceleración del centro de gravedad. Esto es, el centro de gravedad se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto y todas las fuerzas se aplicaran en el mismo.

Si todas las partes del cuerpo se mueven en la misma dirección con la misma velocidad, esta ecuación determina la aceleración de un punto cualquiera del cuerpo. Si las partes de un sistema como una cadena, se mueven todas siguiendo una

misma trayectoria con la misma velocidad y F es la componente de la fuerza a lo largo de la trayectoria, la ecuación (50) da la aceleración a lo largo de la misma.

Ejemplo. Una cadena cuelga de una clavija lisa, estando de un lado de ésta 6 m de longitud y 10 m del otro lado. Calcular el tiempo necesario para que resbale por completo.

La cadena estaría en equilibrio si ambos extremos estuvieran a igual altura, 8 m por bajo de la clavija. Sea x la distancia desde esta línea al extremo corto de la cadena (fig. 14). Si ρ es la masa de 1 m de cadena, la fuerza no equilibrada será el peso

$$2x\rho g$$

de $2x$ metros de cadena. La masa total acelerada es $16\,\rho$. Por tanto,

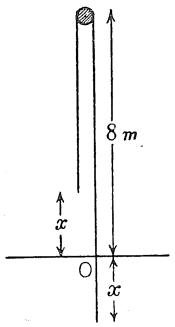

Fig. 14

$$16\rho\frac{d^2x}{dt^2} = 2\rho g x.$$

Una primera integración da

$$8\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = gx^2 + c.$$

Al empezar a moverse la cadena $x = 2$ y $\frac{dx}{dt} = 0$. Por consiguiente,

$$c = -4g$$

y

$$8\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g(x^2 - 4).$$

Separando las variables e integrando nuevamente, obtenemos

$$t = \sqrt{\frac{8}{g}}\int_2^8 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{g}}\ln(4 + \sqrt{15}).$$

37. Sistema con masa variable.—De acuerdo con la segunda ley de Newton, siempre que una fuerza actúa sobre un sistema produce en el mismo una cantidad de movimiento cuya variación con relación al tiempo es igual a la fuerza. Al aplicar esta ley a un sistema de masa variable es necesario distinguir la cantidad de movimiento producida por la fuerza y la debida a las masas que se unen al sistema o lo abandonan.

Así, supongamos que un sistema se mueve paralelamente a una línea recta y que en el momento t tiene una masa m y una velocidad v, estando sometido a una fuerza exterior F, pudiendo variar en función del tiempo uno cualquiera de estos elementos, o todos. En el intervalo siguiente dt supongamos que se une al sistema una cantidad de masa dm y que su velocidad en el instante de unirse es $v + u$. La variación total de la cantidad de movimiento $d(mv)$ se debe en parte a la fuerza F y en parte a la cantidad de movimiento de los elementos de masa que se le han unido. La cantidad de movimiento aportada en el tiempo dt es $(v + u)\,dm$. Por consiguiente,

$$d(mv) - (v + u)\,dm = m\,dv - u\,dm$$

es la parte debida a F. Igualando la fuerza y la variación de cantidad de movimiento se obtiene

$$m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = F. \qquad (51)$$

La misma ecuación es válida cuando los elementos de masa en lugar de unirse al sistema lo abandonan, siendo la única diferencia que $\frac{dm}{dt}$ es entonces una cantidad negativa. La velocidad u es la velocidad relativa de los elementos de masa que se le agregan o se pierden con respecto al resto del sistema. Se mide en la misma dirección que v, siendo positiva cuando tiene la dirección que en el desarrollo del problema se ha elegido como positiva.

Ejemplo. Se impulsa un cohete quemando k kilos de combustible por segundo en una cámara adjunta de manera que los productos de combustión son expulsados directamente hacia atrás. Suponiendo que la energía cinética así desarrollada sea una constante p por unidad de masa de combustible quemado, que el cohete parte del reposo con un peso total W_0 (incluído el combustible) y que no está sometido a ninguna fuerza exterior, calcular la distancia que recorre en el tiempo t.

Sea s la distancia recorrida en t segundos, v la velocidad,

$$m = \frac{W_0 - kt}{g}$$

la masa (cohete y combustible) en el tiempo t, y c la velocidad del escape con respecto al cohete. La energía necesaria para comunicar la velocidad c a la unidad de masa del material es

$$\tfrac{1}{2}c^2 = p,$$

y, por consiguiente,

$$c = \sqrt{2p}.$$

Puesto que la dirección positiva (esto es, aquella en la que s aumenta) es la del movimiento del cohete, la velocidad relativa de los gases de escape será

$$u = -c = -\sqrt{2p}.$$

La ecuación (51) en estas condiciones se transforma en la

$$m\frac{dv}{dt} + \sqrt{2p}\frac{dm}{dt} = 0,$$

de donde

$$dv + \sqrt{2p}\frac{dm}{m} = 0.$$

Integrando y determinando la constante con la condición de ser $v = 0$ cuando m tiene su valor inicial m_0, se obtiene

$$v = \sqrt{2p}\,(\ln m_0 - \ln m).$$

Sustituyendo

$$m = \frac{W_0 - kt}{g}, \quad m_0 = \frac{W_0}{g},$$

mediante una segunda integración obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$s = \sqrt{2p}\int_0^t \left[\ln\frac{W_0}{g} - \ln\left(\frac{W_0 - kt}{g}\right)\right]dt$$

$$= \sqrt{2p}\left[t + \frac{W_0 - kt}{k}\ln\left(\frac{W_0 - kt}{W_0}\right)\right].$$

PROBLEMAS

293. Una cadena de 6 dm de largo empieza a moverse colgando 1 dm sobre el borde de una mesa lisa. Despreciando el rozamiento, calcular el tiempo necesario para que resbale por completo.

294. El tablero de una mesa está a 9 dm por encima del suelo. Una cadena de 18 dm de largo cuelga del borde de la mesa con un extremo tocando el suelo. Hallar la velocidad con que resbala.

295. Una cadena cuelga de una clavija lisa, estando de un lado de ella 8 dm de su longitud y 10 dm del otro. Suponiendo que la fuerza desarrollada por el rozamiento sea igual al peso de 1 dm de cadena, calcular el tiempo necesario para que resbale.

296. De un rollo de cadena que está en reposo se desenrolla ésta y cae directamente hacia abajo por la acción de la gravedad. Suponiendo que parta del reposo con una longitud l sin desenrollar, hallar su velocidad cuando se ha movido una distancia x.

297. Un cohete es impulsado quemando cada segundo una cantidad k de su masa lanzada directamente hacia atrás con una velocidad constante c con respecto al cohete. Si éste parte del reposo con una masa m_0 y está sometido a la gravedad, calcular su altura al cabo del tiempo t.

298. Un cohete parte del reposo con una masa m_0 y cae por la acción de la gravedad. Si el efecto de ésta se contrarresta parcialmente quemando cada segundo una cantidad k de su masa que se lanza directamente hacia abajo con una velocidad c con respecto al cohete, calcular la distancia que cae en el tiempo t.

299. Un cohete que parte con la velocidad v_0 y una masa m_0 se mueve en el espacio libre mientras descarga hacia atrás una cantidad k de su masa por segundo con una velocidad tal que este material descargado queda en el espacio en reposo. Calcular la distancia que el cohete recorre en el tiempo t.

300. Una gota de lluvia cae bajo la acción de la gravedad. Suponiendo que por la humedad atmosférica (que se supone en reposo) crezca con una rapidez proporcional al área de su superficie, y que su radio inicial sea cero, calcular la distancia que cae en el tiempo t.

301. Una gota de lluvia cae a través de una niebla uniforme, arrastrando la neblina de la región que atraviesa. Suponiendo que parte de reposo con un radio cero y que continúa teniendo siempre una forma esférica, demostrar que cae con una aceleración constante $\frac{1}{7}$ g

302. En el problema anterior, calcular la aceleración si la niebla se desplaza hacia abajo con una velocidad constante c.

PROBLEMAS DIVERSOS

303. Hallar la ecuación de la curva cuyo arco sea proporcional al ángulo formado por las tangentes en sus extremos.

304. Hallar la ecuación de la curva cuyo arco sea proporcional a la diferencia de las pendientes de las tangentes en sus extremos.

305. Hallar la ecuación de la curva cuyo arco sea igual a la distancia interceptada sobre el eje de las x por las tangentes en sus extremos.

306. Hallar la flecha de una viga de longitud $4l$ apoyada en ambos extremos y que soporta dos pesos cada uno de W Kg colocados en los dos puntos a una distancia l del centro. Tomando el origen en el centro, determínese primero la curva para la parte de la viga comprendida entre los dos pesos. Luego se halla la curva para el resto, eligiendo las constantes de integración de modo que las dos curvas tengan la misma ordenada y la misma pendiente en el punto en que se unen.

307. Consideremos una columna vertical de longitud l que soporta un peso P. Supongamos que, debido al peso, el extremo superior se desplace la cantidad a con respecto a la vertical. Calcular el momento de flexión y hallar la curva según la cual se comba la columna. Sustituyendo las

coordenadas del extremo superior demostrar que la carga máxima que la columna puede soportar es

$$P = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 EI.$$

308. Supongamos que los extremos de la columna son redondeados pero permanecen en la misma línea vertical. Calcular la carga máxima que puede soportar la columna.

309. Una cadena con un extremo fijo descansa sobre una superficie curva. Suponiendo que su peso por unidad de longitud sea w y que no existan rozamientos, demostrar que la tensión en el punto P de la cadena satisface la ecuación

$$T = wz + k,$$

siendo z la altura de P sobre el plano horizontal y k una constante.

310. Un tubo recto conecta dos puntos, A, B, sobre la superficie terrestre. Un punto material que se mueva a lo largo del tubo sometido a la acción de la gravedad es atraído hacia el centro de la Tierra con una fuerza proporcional a la distancia. Si no hay rozamientos, demuéstrese que la aceleración del punto es proporcional a su distancia al punto medio del tubo, y que el tiempo que tarda en pasar por el tubo es independiente de las posiciones de A y B.

311. Dos puntos materiales de masa m_1, m_2, están unidos a los extremos de una cuerda inextensible que pasa por un anillo liso fijo, descansando el conjunto sobre una mesa horizontal. Suponiendo que el punto m_1 sea proyectado en ángulo recto con la cuerda, hallar la ecuación polar de la curva que describe.

312. Calcular la órbita de un planeta de masa m suponiendo que la fuerza con que es atraído por el Sol es

$$\frac{km}{r^2},$$

siendo r la distancia al Sol y k una constante. Sea r_0 su distancia cuando está más próximo al Sol y v_0 su velocidad en ese instante.

313. Suponiendo que un cometa es atraído por el Sol con la misma fuerza que los planetas, pero que parte del reposo en el infinito, calcular su órbita. Sea r_0 su distancia mínima al Sol.

314. Una gota esférica de lluvia crece de tamaño con una rapidez proporcional al área de su superficie. Suponiendo que al comienzo su radio sea c y que se mueva horizontalmente con una velocidad b, demuéstrese que su trayectoria es una hipérbola con un asíntota vertical.

315. Un cohete en movimiento toma cada segundo $15w$ kilos de aire de la atmósfera, lo quema con w kilos de combustible que lleva a bordo, y lanza los productos de la combustión directamente hacia atrás con una velocidad constante c con respecto al cohete. Suponiendo que parta del reposo con un peso W_0 y que no esté sometido a ninguna fuerza externa, calcular su velocidad al cabo del tiempo t.

316. Un alambre de longitud l y de sección A transmite una corriente de I amperios desde una línea cuya temperatura es T_0 al interior de un horno eléctrico en el que la temperatura es T_1. El alambre está provisto de aislamiento térmico y eléctrico pero a lo largo de él fluye calor y éste se produce también en cada sección del alambre por la corriente que pasa por él (cf. Problema 73, página 32). Suponiendo que la conductibilidad térmica del alambre sea k y su resistividad eléctrica ρ, hallar la temperatura a la distancia x del extremo frío cuando se ha alcanzado un estado de equilibrio. Asimismo, si l es fijo, hallar la sección transversal que hace que la pérdida de calor sea mínima.

CAPÍTULO IV

ECUACIONES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

38. Ecuaciones de orden n.—Resolviendo para la derivada más alta, una ecuación diferencial del orden n puede escribirse bajo la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Para hallar el valor de y, son necesarias n integraciones y así se obtienen n constantes de integración. Una solución

$$y = F(x, c_1, c_2, \cdots, c_n),$$

que contenga n constantes independientes de integración constituye la integral general. Las constantes $c_1, c_2 \cdots c_n$ se dice que son independientes si no es posible introducir nuevas constantes que sean funciones de ellas de manera que y venga expresada en función de x y de menos de n constantes.

Puesto que hay n constantes arbitrarias a nuestra disposición, puede encontrarse, por lo general, una integral particular que satisfaga n condiciones inicialmente asignadas. Así, de ordinario, puede encontrarse una curva que pase por un punto dado y que tenga valores asignados en ese punto de las primeras $n-1$ derivadas. Ocurren, por supuesto, excepciones

cuando se eligen valores que hacen que algunas de las funciones sean indeterminadas o que las ecuaciones resultantes sean incompatibles.

39. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes. — Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} a_n y = f(x), \qquad (52)$$

esto es, una ecuación de primer grado en una de las variables y sus derivadas, se dice que es *lineal.* Si los coeficientes $a_1, a_2 \cdots a_n$ son constantes, recibe el nombre de *ecuación lineal con coeficientes constantes.* En las aplicaciones prácticas del Cálculo infinitesimal es éste uno de los tipos más importantes de ecuaciones.

Para estudiar las ecuaciones lineales con coeficientes constantes es conveniente representar la operación $\frac{d}{dx}$ por una sola letra D. Con este nuevo simbolismo, tendremos

$$\frac{dy}{dx} = Dy, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y, \text{ etc.}$$

La ecuación (52) puede escribirse

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n) y = f(x). \qquad (53)$$

Esto quiere decir que si la operación

$$P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n \qquad (54)$$

se realiza sobre y el resultado es $f(x)$. La operación consiste en diferenciar y, n veces, $n - 1$ veces, etc., multiplicando los resultados por 1, a_1, a_2, etc. y sumando. Para resolver la ecuación es necesario hallar la función y que la operación diferencial (54) convierte en $f(x)$.

Con la ecuación diferencial se asocia una ecuación algebraica

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \qquad (55)$$

que tiene los mismos coeficientes que (52), pero cuyo segundo miembro es cero. Esta recibe el nombre de *ecuación característica.* Si sus raíces son $r_1, r_2 \cdots r_n$ se sabe por Algebra que el polinomio

$$P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n$$

puede descomponerse en factores en la forma

$$P(r) = (r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n). \qquad (56)$$

Esto significa que cuando los factores del segundo miembro se multiplican unos por otros el resultado ordenado según las potencias de r es idéntico a $P(r)$. En esta ecuación puede reemplazarse r por D, lo que da

$$P(D) = (D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n), \qquad (57)$$

pues cuando se desarrolla el segundo miembro de (57) la única diferencia con $P(r)$ es la de haberse sustituído r por D. Por consiguiente, la ecuación diferencial (53) puede escribirse

$$(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n) y = f(x). \qquad (58)$$

Efectuando las operaciones indicadas hallamos

$$(D - r_1) y = \frac{dy}{dx} - r_1 y.$$

Operando en esta ecuación con $D - r_2$ obtenemos

$$(D - r_2)[(D - r_1) y] = (D - r_2)\left(\frac{dy}{dx} - r_1 y\right)$$

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} - (r_1 + r_2) \frac{dy}{dx} + r_1 r_2 y.$$

Si operamos directamente sobre y con el producto

$$(D - r_1)\,(D - r_2) = D^2 - (r_1 + r_2)\,D + r_1 r_2$$

se obtiene el mismo resultado. De una manera análoga podemos demostrar que el resultado de operar con un número cualquiera de factores, $D - r_1$, $D - r_2$, etc., uno después de otro, es independiente del orden de los factores e igual al obtenido cuando operamos directamente con el producto de todos los factores.

Esas propiedades nos permiten manipular los operadores diferenciales como expresiones algebraicas que contienen números. Debe hacerse observar, sin embargo, que esto es cierto únicamente cuando r_1, r_2, etc. son constantes. Si las r son variables no es cierto, por lo general, que

$$(D - r_1)\,[(D - r_2)y] = (D - r_2)\,[(D - r_1)y].$$

40. Ecuaciones con el segundo miembro igual a cero.— Para resolver la ecuación

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)\,y = 0, \quad (59)$$

sean r_1, r_2, $\cdots$ r_n las raíces de la ecuación característica

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0. \quad (60)$$

El operador simbólico puede descomponerse en factores, y, por consiguiente, la ecuación diferencial puede escribirse en la forma

$$(D - r_1)\,(D - r_2)\cdots(D - r_n)\,y = 0.$$

El valor

$$y = c_1 e^{r_1 x},$$

en el que c_1 es una constante cualquiera, es una solución. Pues

$$(D - r_1)c_1 e^{r_1 x} = c_1 r_1 e^{r_1 x} - r_1 c_1 e^{r_1 x} = 0,$$

y la ecuación puede escribirse

$$(D - r_2)\cdots(D - r_n)\,[(D - r_1)y] = 0.$$

Análogamente,

$$y = c_2 e^{r_2 x}, \quad y = c_3 e^{r_3 x}, \text{ etc.},$$

son soluciones. Finalmente,

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad (61)$$

es una solución, pues el resultado de operar sobre este valor de y es la suma de los resultados de operar con $c_1 e^{r_1 x}$, $c_2 e^{r_2 x}$, etcétera, cada uno de los cuales es cero.

Si las constantes r_1, r_2, $\cdots$ r_n son todas diferentes, (61) contiene n constantes independientes y, por tanto, es la integral general de (59).

Pero, si dos raíces r_1, r_2 son iguales, la expresión

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = (c_1 + c_2)e^{r_1 x}$$

contiene únicamente una constante $c_1 + c_2$ y (61) contiene menos de n constantes independientes. Sin embargo, en este caso, $xe^{r_1 x}$ es también una solución, pues

$$(D - r_1)\cdot xe^{r_1 x} = r_1 x e^{r_1 x} + e^{r_1 x} - r_1 x e^{r_1 x} = e^{r_1 x},$$

y, por consiguiente,

$$(D - r_1)\,(D - r_2)xe^{r_1 x} = (D - r_1)^2 x e^{r_1 x} = (D - r_1)e^{r_1 x} = 0.$$

Si se verifica, pues, que

$$r_2 = r_1,$$

la parte de la solución que corresponde a esas raíces es

$$(c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}.$$

Más generalmente, si

$$r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_m,$$

a parte de solución que corresponde a esas raíces es

$$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_m x^{m-1})e^{r_1 x}. \quad (62)$$

Para resolver la ecuación diferencial

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)y = 0,$$

se hallan las raíces $r_1, r_2, \cdots r_n$ *de la ecuación característica*

$$r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Si esas raíces son todas diferentes la solución es

$$y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + \cdots + c_ne^{r_nx}.$$

Pero si m *de las raíces* $r_1, r_2, \cdots r_m$ *son iguales, la parte correspondiente de la solución es*

$$(c_1 + c_2x + \cdots + c_mx^{m-1})e^{r_1x}.$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Esto equivale a

$$(D^2 - D - 2)y = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica son -1 y 2. Por consiguiente, la solución es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$$

La ecuación característica puede descomponerse factorialmente en la forma

$$r^3 + r^2 - 5r + 3 = (r - 1)^2(r + 3) = 0.$$

Las raíces son, pues, 1, 1, -3. La parte de la solución que corresponde a las dos raíces iguales a 1 es

$$(c_1 + c_2x)e^x,$$

y la correspondiente a la raíz -3 es

$$c_3e^{-3x}.$$

Por consiguiente la integral general será

$$y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3e^{-3x}.$$

41. Raíces imaginarias. — Si alguna de las raíces r_1, r_2, etcétera son imaginarias, las soluciones (61) y (62) son todavía correctas, pero tal vez no tengan una forma conveniente. Si los coeficientes a_1, a_2, $\cdots$ a_n son reales, las raíces imaginarias se presentan por pares

$$r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Los términos

$$c_1e^{r_1x}, \qquad c_2e^{r_2x}$$

pueden entonces ser imaginarios pero tener una suma real. Veamos como en este caso se pueden reemplazar por otras expresiones que no tienen esta apariencia imaginaria.

Para ello utilizamos las fórmulas de Euler

$$\left.\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta, \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

en la que i representa a $\sqrt{-1}$. Esas fórmulas pueden comprobarse desarrollando ambos miembros en serie de Maclaurin.

En efecto, si en el desarrollo en serie de e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

reemplazamos x por $i\theta$, y tenemos en cuenta las igualdades

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \text{ etc.},$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right)$$

obtenemos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

pues los desarrollos en serie de Maclaurin de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots.$$

Sea r_1 y r_2 dos de las raíces

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta.$$

Entonces

$$e^{r_1 x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x),$$

$$e^{r_2 x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x).$$

Por consiguiente,

$$c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen}\beta x]$$

$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\operatorname{sen}\beta x),$$

en la que

$$A = c_1 + c_2, \qquad B = i(c_1 - c_2).$$

Asignando valores adecuados a c_1 y c_2, puede hacerse que las constantes A y B adopten cualesquiera valores que queramos.

Por consiguiente, A y B son constantes arbitrarias que las podemos designar, si queremos, por c_1, c_2.

Por consiguiente, *la parte de la solución correspondiente a dos raíces*

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

puede reemplazarse por

$$e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x). \tag{64}$$

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

La ecuación característica

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

tiene las raíces

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i.$$

En este caso

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}, \qquad \beta = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

De donde, la integral general es

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x\right)\right].$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{dy}{dx} = 0.$$

Las raíces de la ecuación

$$r^3 + 4r = 0$$

son $r = 0$ y $r = \pm 2i$.

Puesto que $a = 0$ y

$$e^{0 \cdot x} = e^0 = 1,$$

la integral general será

$$y = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \operatorname{sen}(2x).$$

EJERCICIOS

317. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 0.$

318. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$

319. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0.$

320. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0.$

321. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} = 0.$

322. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 0.$

323. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$

324. $\frac{d^4y}{dx^4} = y.$

325. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$

326. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$

327. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$

328. $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0.$

329. $\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

330. $\frac{d^3y}{dx^3} = y.$

331. $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

42. Ecuación en la que el segundo miembro es una función de x. – Sea $y = u$ la *integral general* de la ecuación

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)\,y = 0, \qquad (65)$$

y sea $y = v$ una *solución cualquiera* de la ecuación

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x). \qquad (66)$$

Entonces

$$y = u + v$$

es una solución de (66), pues cuando se realiza la operación

$$P(D) = D^n + a_1{}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

sobre u da cero, y cuando se realiza sobre v da $f(x)$. Por consiguiente

$$P(D) \cdot (u + v) = P(D) \cdot u + P(D) \cdot v = f(x),$$

que muestra que $u + v$ es una solución de (66).

Puesto que u contiene n constantes independientes, $u + v$ contiene también n constantes independientes. Por consiguiente, $y = u + v$ es la integral general de (66).

La parte u se denomina *función complementaria*, la parte v es una *integral particular*. Hemos dado métodos completos para resolver la ecuación cuyo segundo miembro es cero y, por consiguiente, podemos hallar la función complementaria. Para resolver una ecuación cuyo segundo miembro es una función de x lo único que hay que hacer es hallar una integral particular. Esta es simplemente cualquier función v que satisface la ecuación completa

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)\,v = f(x).$$

Si puede hallarse una función cualquiera de esa índole a simple vista o por tanteo, entonces

$$y = u + v$$

es la integral general buscada.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2.$$

La función complementaria se obtiene resolviendo la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica son 1, —1. Por consiguiente,

$$u = c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

La integral particular es cualquier valor de y que satisface la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 2.$$

Puesto que la derivada de una constante es cero, es evidente que

$$y = -2$$

satisface la ecuación. Por consiguiente, adoptamos como integral particular

$$v = -2.$$

La integral general es, pues,

$$y = u + v = c_1e^x + c_2e^{-x} - 2.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}.$$

La función complementaria obtenida resolviendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

es

$$u = ce^{-4x}.$$

Para encontrar una integral particular tenemos que hallar algún valor de y que satisfaga toda la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}.$$

Puesto que la derivada de e^{2x} es simplemente un múltiplo de e^{2x} ensayamos

$$y = Ae^{2x}.$$

Sustituyendo este valor de y, la ecuación se convierte en

$$2Ae^{2x} + 4Ae^{2x} = e^{2x},$$

que es satisfecha por la condición

$$6A = 1,$$

esto es, cuando $A = \frac{1}{6}$. Por lo tanto

$$v = \tfrac{1}{6}e^{2x}$$

es una integral particular, y

$$y = ce^{-4x} + \tfrac{1}{6}e^{2x}$$

es la integral general.

43. Método de los coeficientes indeterminados.—Los ejemplos que acabamos de resolver ilustran un procedimiento matemático que se conoce con el nombre de método de los coeficientes indeterminados. Cuando se conoce la forma general de una solución, pero se desconocen los coeficientes precisos, este método consiste en suponerlos conocidos representándolos mediante literales, efectuar la sustitución y establecer las correspondientes ecuaciones de identidad que permitirán el cálculo de los coeficientes buscados.

Así, para hallar una integral particular de la ecuación lineal

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n)\,y = f(x),$$

examinamos qué clases de funciones, sustituídas en lugar de y, harán que el primer miembro tenga términos de la misma clase que los de $f(x)$, tomamos como valor de tanteo de y una función lineal con coeficientes constantes de aquellos térmi-

nos, sustituimos esta función en la ecuación diferencial, y hallamos los valores de los coeficientes que hacen que los dos miembros sean idénticos.

Este método puede emplearse siempre que $f(x)$ sea una suma de términos cada uno de los cuales tiene únicamente un número finito de derivadas independientes de primer grado. La mayoría de las ecuaciones lineales que se presentan en las aplicaciones prácticas satisfacen esta condición. Por ejemplo, si

$$f(x) = e^{2x} + \operatorname{sen} 3x,$$

el término e^{2x}, cuando se diferencia una o más veces, da únicamente múltiplos de e^{2x}, y sen $3x$ da solamente múltiplos de sen $3x$ y cos $3x$. En este caso, debe hacerse primero una lista de las funciones independientes que son lineales en $f(x)$ y sus derivadas. En el caso que acabamos de mencionar la lista contiene sólo las funciones

$$e^{2x}, \qquad \operatorname{sen} 3x, \qquad \cos 3x.$$

Si ninguna función de esta lista es un término en la función complementaria, puede hallarse una integral particular que sea una función lineal de todas ellas con coeficientes constantes. Así, en el caso anterior, si se supone una integral particular de la forma

$$y = Ae^{2x} + B \operatorname{sen} 3x + C \cos 3x$$

para calcular los coeficientes A, B, C, sustituiremos el valor supuesto de y en la ecuación diferencial e igualaremos los coeficientes de las funciones semejantes en los dos miembros. De esta manera obtendremos un número de ecuaciones igual al número de funciones, y, por lo tanto, igual al número de constantes indeterminadas, de las que podremos obtener esas constantes.

Si aparecen en la función complementaria algunas de las funciones de la lista anterior, desaparecerán cuando se sustituya el valor supuesto en la ecuación diferencial, y no dará resultado el procedimiento que acabamos de describir. En ese caso se disponen las funciones por grupos, formándose los miembros de cada grupo por diferenciación partiendo de un término. Así, en el ejemplo que antecede, hay dos grupos

$$e^{2x}$$

y

$$\operatorname{sen} 3x, \qquad \cos 3x.$$

Si un término de uno de esos grupos es parte de la función complementaria, se multiplican todos los términos de su grupo por la potencia más baja de x que hace que todos esos términos sean diferentes de los de la función complementaria y se usan esos, en lugar de los términos originales, al formar la integral particular.

Así, supongamos en el ejemplo anterior que la función complementaria es

$$u = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x.$$

Los términos sen $3x$ y cos $3x$ aparecen en la función complementaria, y, por consiguiente, debemos tomar para integral particular

$$y = x(A \operatorname{sen} 3x + B \cos 3x) + Ce^{2x}.$$

Al resolver un caso de esta índole se hallará que la potencia de x así introducida se elimina y que los coeficientes se obtienen como antes.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + y = \operatorname{sen} x.$$

La función complementaria es

$$u = ce^{-x}.$$

Si se diferencia sen x cualquier número de veces, las únicas funciones obtenidas son sen x y cos x. Puesto que ninguna de estas funciones se presentan en la función complementaria, tomamos

$$y = A \operatorname{sen} x + B \cos x.$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$(A + B) \cos x + (A - B) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Igualando los coeficientes de las funciones similares de ambos miembros

$$A + B = 0, \qquad A - B = 1,$$

de donde

$$A = \tfrac{1}{2}, \qquad B = -\tfrac{1}{2}.$$

La integral particular es

$$\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x),$$

y la integral general

$$y = ce^{-x} + \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x).$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = x^2 + 2x + e^x.$$

En este caso la función complementaria es

$$u = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}.$$

Las funciones x^2, x y sus derivadas dan los términos

$$Ax^2 + Bx + C$$

para la integral particular. Puesto que Bx y C se presentan en la función complementaria multiplicamos por x^2, obteniendo

$$x^2(Ax^2 + Bx + C).$$

El término e^x no aparece en la función complementaria y no proporciona ningún término nuevo por diferenciación. Por consiguiente, para obtener una integral particular hacemos

$$y = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, se obtiene

$$12Ax^2 + (24A + 6B)x + 6B + 2C + \\ + 2De^x = x^2 + 2x + e^x.$$

Igualando los coeficientes correspondientes

$$12A = 1, \quad 24A + 6B = 2, \quad 6B + 2C = 0, \quad 2D = 1,$$

de donde

$$A = \tfrac{1}{12}, \quad B = C = 0, \quad D = \tfrac{1}{2},$$

y por consiguiente

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{2}e^x$$

es la integral general.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3x \cos x.$$

La función complementaria es

$$u = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x.$$

De $x \cos x$ y de sus derivadas obtenemos los términos

$$x \cos x, \qquad x \operatorname{sen} x, \qquad \cos x, \qquad \operatorname{sen} x.$$

Puesto que ninguno de esos se presenta en la función complementaria, tomamos

$$y = Ax \cos x + Bx \operatorname{sen} x + C \cos x + D \operatorname{sen} x$$

para obtener una integral particular. La sustitución en la ecuación diferencial da

$$3Ax\cos x + 3Bx \operatorname{sen} x + (2B + 3C)\cos x + \\ + (3D - 2A)\operatorname{sen} x = 3x\cos x,$$

de donde

$$A = 1, \qquad B = C = 0, \qquad D = \tfrac{2}{3},$$

y la integral general es

$$y = c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x + x\cos x + \tfrac{2}{3}\operatorname{sen} x.$$

EJERCICIOS

332. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x$.

333. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = x$.

334. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 2e^{2x}$.

335. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 5 \operatorname{sen} 2x$.

336. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos x$.

337. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = 5x$.

338. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 1 + 5\cos x$.

339. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = x^2$.

340. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{sen} x$.

341. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 3xe^x$.

342. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{dy}{dx} = x + 1$.

343. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 4x \operatorname{sen} x$.

344. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}$.

345. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} = 2e^{2x} \operatorname{sen} x$.

346. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^x + e^{2x}$.

347. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = e^{2x} + 4 \operatorname{sen} x$.

44. Métodos simbólicos.—En el Artículo 39 hicimos observar que una ecuación diferencial lineal puede escribirse en la forma

$$P(D)y = f(x), \tag{67}$$

en la que $P(D)$ representa el símbolo operatorio

$$P(D) = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n.$$

Si los coeficientes $a_1, a_2 \cdots a_n$ son constantes, esos operadores tienen muchas de las propiedades de los polinomios algebraicos, y esta es la base de ciertos métodos simbólicos con los que pueden, a veces, obtenerse soluciones con mayor facilidad que por los métodos antes descritos.

En esta obra tenemos con frecuencia que interpretar una expresión simbólica de la forma

$$z = \frac{1}{D - r} f(x), \tag{68}$$

en la que r es constante. Esta expresión puede considerarse como obtenida de

$$(D - r)z = f(x) \tag{69}$$

dividiendo ambos miembros por $D - r$. Así (68) se define como la solución de (69). De la ecuación (17) se deduce

$$\frac{1}{D-r} f(x) = e^{rx} \int e^{-rx} f(x)\, dx + ce^{rx}. \qquad (70)$$

Si sólo se busca una integral particular, puede omitirse la constante de integración.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^x.$$

Esta expresión equivale a

$$(D-1)^2 y = x^2e^x,$$

de donde

$$y = \frac{1}{(D-1)^2} x^2e^x = \frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} x^2e^x.$$

Según la ecuación (70) tenemos

$$\frac{1}{D-1} x^2e^x = e^x \int e^{-x} x^2 e^x\, dx = \tfrac{1}{3}x^3e^x.$$

Una segunda aplicación de la misma fórmula da

$$\frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{D-1} x^2e^x = \tfrac{1}{12}x^4e^x.$$

Como lo único que nos interesa es hallar una integral particular, hemos omitido en ambos casos la constante de integración. Agregando la función complementaria obtenemos finalmente

$$y = (c_1 + c_2x + \tfrac{1}{12}x^4)\, e^x.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{1}{x}.$$

En forma simbólica

$$(D^2 - 1)y = \frac{1}{x}$$

o sea

$$y = \frac{1}{D^2-1} \cdot \frac{1}{x}.$$

Por Algebra sabemos que

$$\frac{1}{D^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D-1} - \frac{1}{D+1}\right]$$

y, por consiguiente,

$$y = \frac{1}{2}\frac{1}{D-1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{D+1} \cdot \frac{1}{x}.$$

Aplicando la ecuación (70) a cada término, se obtiene

$$y = \frac{1}{2}e^x \int \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \frac{1}{2}e^{-x} \int \frac{e^x}{x}\, dx + c_1e^x + c_2e^{-x}.$$

Las integrales que entran en esta expresión no pueden expresarse en función de funciones elementales.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^4.$$

En este caso tenemos

$$(D^2 + 1)\, y = x^4.$$

o sea

$$y = \frac{1}{1+D^2} x^4.$$

Dividiendo tenemos

$$\frac{1}{1+D^2} = 1 - D^2 + D^4 - D^6 + \cdots.$$

Por consiguiente,

$$(1 - D^2 + D^4 - D^6 + \cdots)\, x^4 = x^4 - 12x^2 + 24$$

es una integral particular. Luego

$$y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x^4 - 12x^2 + 24$$

es la integral buscada.

45. Método de variación de constantes.—Cuando se conoce la función complementaria, existe un método para hallar una integral particular que es aplicable a cualquier ecuación lineal, sean o no constantes sus coeficientes. Para ilustrar este método, llamado de *variación de constantes*, examinaremos el caso de la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\, y = f_3(x). \tag{71}$$

Supongamos que la integral general de la ecuación abreviada

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)\, y = 0 \tag{72}$$

es

$$u = c_1u_1 + c_2u_2,$$

en la que u_1, u_2 son funciones de x, y c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Tratemos de reemplazar c_1, c_2 por las variables C_1, C_2 tales que

$$y = C_1u_1 + C_2u_2 \tag{73}$$

sea una solución de (71). Para mayor comodidad usamos la notación

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx}, \qquad C_2' = \frac{dC_2}{dx}.$$

En general, dos funciones C_1, C_2 quedarán determinadas por dos condiciones. Como primera condición ponemos

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0. \tag{74}$$

La primera y la segunda derivada de y son entonces

$$\frac{dy}{dx} = C_1\frac{du_1}{dx} + C_2\frac{du_2}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d^2u_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2u_2}{dx^2} + C_1'\frac{du_1}{dx} + C_2'\frac{du_2}{dx}.$$

Sustituyendo esos valores y el valor anterior de y en (71), y observando que u_1 y u_2 son soluciones de (72), tenemos

$$C_1'\frac{du_1}{dx} + C_2'\frac{du_2}{dx} = f_3(x). \tag{75}$$

Resolviendo (74) y (75) obtenemos

$$C_1' = \frac{dC_1}{dx}, \qquad C_2' = \frac{dC_2}{dx}$$

como funciones de x. Integrando esas funciones podemos determinar las cantidades C_1, C_2 que sustituídas en (73) dan la solución deseada.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \operatorname{tg} x.$$

La función complementaria es

$$u = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

Reemplazando la constantes c_1, c_2 por funciones C_1, C_2 tratemos de hallar una integral general de la forma

$$y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x. \qquad (a)$$

Diferenciando y haciendo

$$C_1' \operatorname{sen} x + C_2' \cos x = 0. \qquad (b)$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \operatorname{sen} x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \operatorname{sen} x - C_2 \cos x + C_1' \cos x - C_2' \operatorname{sen} x.$$

Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación diferencial,

$$C_1' \cos x - C_2' \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x. \qquad (c)$$

Resolviendo (b) y (c) hallamos

$$C_1' = \operatorname{sen} x, \qquad C_2' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x},$$

de donde

$$C_1 = -\cos x + c_1, \qquad C_2 = \operatorname{sen} x - \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + c_2.$$

Así, (a) es equivalente a

$$y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x - \cos x \ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$$

46. Ecuaciones lineales homogéneas.—Una ecuación de la forma

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x), \qquad (76)$$

en la que $a_1, a_2 \cdots a_n$ son constantes, se denomina a veces ecuación homogénea de primer grado. El primer miembro es una expresión del tipo que hemos llamado homogéneo en x (cf. Art. 31). Efectuando la sustitución

$$x = e^t$$

el primer miembro se reduce a una forma que no contiene t, y la ecuación se convierte en otra de primer grado con coeficientes constantes.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 1 + x^2.$$

La sustitución

$$x = e^t$$

da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt}\frac{1}{x^2}.$$

La ecuación diferencial se convierte, pues, en

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 1 + e^{2t}$$

Esta ecuación tiene por solución

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} e^{2t}.$$

Reemplazando e^t por x, esta expresión se convierte en

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} x^2.$$

47. Sistemas de ecuaciones lineales.—Los sistemas de ecuaciones lineales que contienen una sola variable independiente pueden resolverse por un procedimiento de eliminación

análogo al utilizado en Algebra para resolver los sistemas de ecuaciones. Si hay tantas variables dependientes como ecuaciones, pueden eliminarse todas menos una, la cual aparece como solución de una ecuación diferencial lineal. Su valor puede hallarse resolviendo esta ecuación, y entonces puede obtenerse las otras variables dependientes sustituyendo en las ecuaciones anteriores.

A ser posible, el trabajo debe disponerse de modo que después de hallar la primera variable, las otras puedan determinarse sin integración. Si se emplea la integración para determinar esas otras variables, las constantes de integración quizás no sean todas arbitrarias. Entonces es necesario sustituir los valores hallados en las ecuaciones diferenciales para hallar las relaciones entre las constantes. El número de contantes suele ser igual a la suma de los órdenes de las ecuaciones diferenciales, aunque en algunos casos excepcionales no es así.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - y = e^t,$$

$$\frac{dy}{dt} - 2x = 0.$$

Usando D en lugar de $\frac{d}{dt}$ estas ecuaciones pueden escribirse en la forma

$$(D^2 - 3)x - y = e^t,$$
$$-2x + Dy = 0.$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda por $D^2 - 3$, tenemos

$$2(D^2 - 3)x - 2y = 2e^t,$$
$$-2(D^2 - 3)x + (D^2 - 3)\,Dy = 0.$$

Sumando, se obtiene

$$(D^3 - 3D - 2)y = 2e^t.$$

De esta ecuación, que contiene solamente una variable dependiente, puede despejarse el valor de y, resultando

$$y = (c_1 + c_2t)\,e^{-t} + c_3e^{2t} - \tfrac{1}{2}e^t.$$

Sustituyendo este valor de y en la segunda ecuación, hallamos

$$x = \tfrac{1}{2}Dy = \tfrac{1}{2}[(c_2 - c_1) - c_2t]e^{-t} + c_3e^{2t} - \tfrac{1}{4}e^t.$$

EJERCICIOS

348. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{-2x}.$

349. $\frac{d^4y}{dx^4} - y = x^5 - x.$

350. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = xe^{-x}.$

351. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}\ln x.$

352. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \ln x.$

353. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec x.$

354. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = e^x + e^{-x}.$

355. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \operatorname{ctg} x.$

356 $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 3(x + y).$

357. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = 0$

358. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 2x.$

359. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{dx}{dy} + \dfrac{2}{x^2}y = x \ln x.$

360. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = x.$

361. $\dfrac{dx}{dt} = y + 1, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x + 1.$

362. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \qquad \dfrac{dy}{dt} = x - y.$

363. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = x, \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} = y.$

364. $\dfrac{dx}{dt} + 2y = 0, \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + y = e^t.$

365. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} + y = t, \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x + y = t^2.$

366. $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + x = 0, \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} + 3x - y = 0.$

367. $t\dfrac{dx}{dt} + y = t, \qquad t\dfrac{dy}{dt} + x = 1.$

48. Rotación alrededor de un eje fijo.—Supongamos que un cuerpo (fig. 15) gira alrededor del eje perpendicular al plano AOB que pasa por el punto O. La posición del cuerpo puede determinarse por el ángulo θ comprendido entre la línea fija OA y la línea OB fija en el cuerpo. La *velocidad angular* de rotación es, pues,

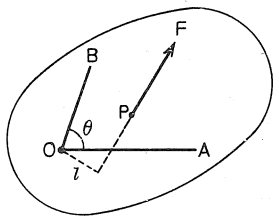

Fig. 15

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{77}$$

y su *aceleración angular*

$$a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{78}$$

Sea F una fuerza en el plano AOB aplicada al cuerpo en P. El par con respecto al eje de rotación debido a esta fuerza es

$$T = Fl,$$

siendo l la distancia desde O a la línea FP. El par es positivo cuando la fuerza tiende a producir la rotación en la dirección positiva de θ.

El par y la aceleración angular satisfacen la ecuación

$$T = Ia, \tag{79}$$

en la que I es el momento de inercia respecto del eje de rotación y T es el par total respecto de ese eje de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Esto es análogo a

$$F = ma,$$

correspondiendo el momento de inercia a la masa, y el par a la fuerza.

49. Movimientos vibratorios.—Cuando se imprime a un cuerpo un ligero desplazamiento con respecto a su posición de equilibrio y se le suelta, oscila alrededor de la posición inicial.

Si se prescinde de la resistencia, la ecuación diferencial de movimiento suele tener la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0,$$

en la que x es el desplazamiento, t el tiempo y k una constante. Por los métodos que hemos empleado, la solución de esta ecuación es

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt.$$

En muchos casos es más conveniente, sin embargo, escribirla en la forma

$$x = a \operatorname{sen} (kt + \theta). \tag{80}$$

Para demostrar la equivalencia de las dos formas sean c_1, c_2 los catetos de un triángulo rectángulo de hipotenusa a y ángulo en la base θ (fig. 16). Entonces

$$c_1 = a \operatorname{sen} \theta, \quad c_2 = a \cos \theta$$

y

$$\begin{aligned} c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt &= a (\cos kt \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} kt \cos \theta) \\ &= a \operatorname{sen} (kt + \theta). \end{aligned}$$

Puesto que el seno no es nunca mayor que 1, el valor máximo de x es a. Este valor se denomina *amplitud* de la oscilación. La cantidad

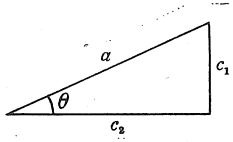

Fig. 16

$$kt + \theta$$

es un ángulo en función del cual se expresa el desplazamiento, y θ es el valor de este ángulo cuando $t = 0$. En una oscilación completa el ángulo aumenta 360°, o sea 2π. El tiempo de vibración, o período, T es, pues, la cantidad que tiene que aumentar t para hacer que la variación de $kt + \theta$ sea igual a 2π. Esto es,

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

El ángulo $kt + \theta$ no suele aparecer en la gráfica del movimiento.

Si la resistencia es proporcional a la velocidad, el desplazamiento suele determinarse por medio de una ecuación de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2a\frac{dx}{dt} + bx = 0,$$

en la que a y b son constantes positivas. La ecuación característica

$$r^2 + 2ar + b = 0$$

tiene las raíces

$$r = -a \pm \sqrt{a^2 - b}.$$

Si $a^2 \geq b$ las raíces r_1, r_2 son números reales negativos, y

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

se aproxima a cero a medida que aumenta t. En este caso no hay oscilación. Pero si $a^2 < b$, las raíces son imaginarias. Entonces

$$x = Ae^{-at} \operatorname{sen} (t\sqrt{b - a^2} + \theta),$$

en la que A y θ son constantes de integración. Esta ecuación representa un movimiento oscilatorio de amplitud

$$Ae^{-at}.$$

Puesto que esta expresión disminuye con el tiempo el movimiento se dice que es una *vibración amortiguada*.

En algunos casos se obtiene una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k^2 \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Esta no es una ecuación lineal. Sin embargo, se convierte en una ecuación lineal si reemplazamos sen θ por θ. Para ángulos pequeños puede hacerse esta sustitución sin gran error. Así, cuando el ángulo es 5°,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= 0{,}08716, \\ \theta &= 0{,}08727, \end{aligned}$$

y vemos que el error es aproximadamente de una parte en 800. Incluso para un ángulo de 10°, el error es sólo del medio por ciento aproximadamente.

Ejemplo. Un péndulo formado por un punto material de masa m, pendiente de una cuerda de longitud l, oscila en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad. Hallar el período de oscilación.

El par alrededor del punto de suspensión debido al peso de m es

$$-mgl \operatorname{sen} \theta,$$

empleándose el signo negativo porque cuando θ es positivo el par tiende a disminuir el valor de θ. La velocidad de m es igual a

$$l \frac{d\theta}{dt}.$$

La resistencia es, pues,

$$kl \frac{d\theta}{dt}.$$

El par debido a esta resistencia es

$$-kl \frac{d\theta}{dt} l,$$

empleándose el signo negativo porque el par es negativo cuando $\frac{d\theta}{dt}$ es positivo. El momento de inercia de m alrededor de O es ml^2. La ecuación

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = T$$

es, pues,

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \operatorname{sen} \theta - kl^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

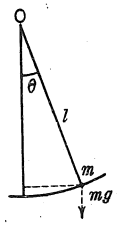

Fig. 17

Reemplazando sen θ por θ se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

La condición para el movimiento vibratorio es

$$\frac{k^2}{4m^2} < \frac{g}{l}.$$

Si esta condición se satisface la solución es

$$\theta = Ae^{-\frac{kt}{2m}} \operatorname{sen} \left[t \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}} + \alpha \right],$$

en la que A y α son constantes. El período de oscilación es pues,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}}.$$

PROBLEMAS

368. Un punto material se mueve a lo largo de una línea recta, siendo su distancia a un punto fijo de la misma

$$x = 1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right).$$

Hallar el período de vibración.

369. El movimiento de un punto material es determinado por la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 226x = 0.$$

Hallar el período de vibración y el tiempo necesario para que la amplitud disminuya a la mitad de su valor inicial.

370. Se observa que un cuerpo que pesa 4,5 Kg vibra 90 veces por minuto y que la oscilación se amortigua a la mitad de la amplitud en 15 segundos. Hallar la ecuación diferencial que representa el movimiento, suponiendo que la resistencia es proporcional a la velocidad.

371. Un péndulo está formado por una barra uniforme de longitud l suspendida en un extremo. Despreciando la resistencia, hallar el período de oscilaciones pequeñas.

372. Un disco horizontal de radio a y masa M está unido por su centro a un alambre vertical. Cuando el disco gira alrededor del eje vertical un ángulo θ, el par ejercido por el alambre es

$$T = k\theta.$$

Una vez que se le pone en movimiento alrededor del eje vertical, el disco vibra n veces por segundo. Hallar la constante k.

373. La fuerza ejercida por un resorte helicoidal es proporcional a la cantidad que se estira el resorte y es 0,9 Kg cuando el resorte se estira 1,27 cm. Del resorte se ha suspendido una masa de 2,265 Kg. Suponiendo que la masa se deprime ligeramente y que luego se la suelta, hállese el tiempo de vibración.

374. Un punto de masa m que se mueve siguiendo una línea que pasa por el origen es atraído hacia éste con una fuerza c veces la distancia, y está sometido a una resistencia igual a b veces su velocidad. Hallar el valor máximo de m para el cual el movimiento no será oscilatorio.

375. Una baliza cilíndrica se mantiene vertical en el agua. Su diámetro es 30,5 cm y su peso 90,6 Kg. Prescindiendo del impulso del agua, hallar el tiempo de vibración cuando se la sumerge ligeramente y se la suelta.

376. Una bola esférica de radio igual a 30,5 cm flota medio sumergida en agua. Hallar el tiempo de vibración si se la sumerge ligeramente y después se la suelta.

377. La fuerza ejercida por un campo magnético de fuerza H sobre un polo magnético de fuerza M es MH. Una aguja magnética de masa m, longitud l y fuerza polar M, montada en un plano horizontal, se observa que vibra n veces por segundo con respecto a la línea norte-sur. Hallar la componente horizontal H del campo magnético terrestre.

378. Un tubo está curvado en forma de U formada por un semicírculo de radio 15 cm y dos lados rectos verticales. La parte semicircular está llena de un líquido. Despreciando el rozamiento, hallar el tiempo de vibración del líquido cuando se obliga a descender ligeramente su superficie en una de las ramas y se la deja después libre.

379. Una barra de longitud $2l$ descansa en posición horizontal sobre un cilindro de radio a. Suponiendo que se le incline ligeramente, hallar el tiempo de vibración.

380. Una barra de longitud $2l$ es mantenida en posición horizontal por cuerdas verticales de longitud l unidas a sus extremos. Suponiendo que se desplace la barra un pequeño ángulo con respecto a la vertical que pasa por su centro y se la suelte, hállese el tiempo de vibración.

381. Un extremo de una cuerda elástica de longitud natural a está unido a un punto fijo sobre una mesa horizontal y una masa m está unida al otro extremo. Si se desplaza a un lado m hasta que la cuerda se alarga la cantidad a y se la suelta, hállese el tiempo de una vibración completa suponiendo que una fuerza de P libras alarga la cuerda 1 pie.

382. La f. e. m. a través de una inductancia L es $L\frac{di}{dt}$, y la que actúa sobre una resistencia R es Ri, y en un condensador de capacidad C es

$$\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt,$$

en la que i es la corriente y t el tiempo medio desde el instante en que el condensador se descarga. Una inductancia, una resistencia y un condensador están conectados en serie. Suponiendo que se hace pasar una pequeña corriente por el circuito y que después se suprime la f. e. m., hallar la forma en que oscila el circuito y la frecuencia de las oscilaciones.

383. Si la resistencia en el problema anterior es negativa, demostrar que la amplitud de una pequeña oscilación aumentará indefinidamente. Este caso tiene importancia en los circuitos que comprenden tubos al vacío.

384. Dos cuerpos de masa m se ven obligados a moverse, uno a lo largo del eje de las x, el otro a lo largo del eje de las y. Suponiendo que partan del reposo en $x = a$, $y = b$ y que se atraigan el uno al otro con una fuerza k^2m veces la distancia entre ellos, hallar la ecuación de movimiento.

385. Un punto de masa m partiendo del reposo es atraído hacia dos centros con una fuerza igual a k veces su distancia a ellos. Suponiendo que la distancia entre los centros sea $2b$ y que el punto está situado sobre la línea de unión a una distancia c del centro, hallar la ecuación de movimiento.

386. En el problema anterior hallar la ecuación de movimiento si el punto parte con una velocidad v_0 en dirección perpendicular a la recta que une los centros de atracción.

387. Un punto material se mueve de modo que sus aceleraciones a lo largo de un radio y perpendicular al mismo son cero. Hallar la curva descrita.

388. Un tubo horizontal gira alrededor de un eje vertical con una velocidad angular ω. Una bola dentro del tubo, que resbala por el mismo sin rozamiento, parte del centro con una velocidad v_0. Hallar la ecuación de movimiento.

389. Un peso de 1,812 Kg está suspendido de un resorte. El peso extiende el resorte 2,5 cm. Suponiendo que se comunique al extremo superior del resorte el movimiento armónico

$$y = \operatorname{sen}\left(\sqrt{12g}\,t\right),$$

demuéstrese que las vibraciones del peso tendrán una amplitud que irá creciendo constantemente. Se trata de un caso de resonancia.

390. Cuando pasa por una resistencia R una corriente I, la pérdida de potencial es RI. Si se imprime un potencial E en una región de escape G, la corriente que se pierde es EG. Suponiendo que la resistencia de un cable sea r por unidad de longitud y su escape g por unidad de longitud, ¿qué potencial y qué corriente tendrá que recibir una línea de longitud l en un extremo, si la corriente y el potencial en el otro extremo tienen que ser I_0 y E_0?

391. El área comprendida entre el arco de una curva y su cuerda es igual a dos tercios de la del triángulo formado por la cuerda y las tangentes en sus extremos. Hallar la ecuación de la curva. Tómese el origen sobre la curva y una de las tangentes como eje de las y.

392. Un alambre de masa m y longitud l está fijo en uno de sus extremos y gira con una velocidad angular ω en un plano horizontal. Suponiendo que bajo la acción de una fuerza F se alarga klF, calcular el alargamiento producido por la fuerza centrífuga.

393. Una viga descansa en toda su longitud sobre un material elástico que reacciona con una fuerza proporcional a la cantidad que se comprime. Suponiendo que sostenga un peso W en el centro, hallar la ecuación de la curva que forma al combarse.

394. Cuando un electrón de carga e se mueve con una velocidad v en un campo magnético de intensidad H, es repelido con una fuerza

$$F = \frac{e}{c} vH \operatorname{sen} \phi,$$

en la que c es la velocidad de la luz y ϕ el ángulo formado por los vectores v y H. La fuerza es perpendicular a v y a H y está dirigida de tal manera que una rotación hacia la derecha alrededor de F de una amplitud ϕ hace que v sea igual a H.

Si H es constante y el electrón parte con una velocidad v_0 en un plano perpendicular a H, hallar la trayectoria descrita.

395. Un electrón se mueve en un campo magnético de intensidad H. Suponiendo que parta con una velocidad v_0 en una dirección que forma un ángulo α con H, hallar la trayectoria descrita.

396. Un extremo de una barra metálica se mantiene a la temperatura T_1. El calor que penetra en la barra por este extremo es conducido a lo largo de la misma y disipado desde su superficie al aire. Supóngase que la rapidez con que pierde calor por unidad de superficie es K_1 veces la diferencia entre la temperatura T de la superficie y la temperatura T_0 del aire, que el radio r de la barra es tan pequeño que la temperatura puede considerarse uniforme en una sección transversal perpendicular al eje, y que la barra es tan larga que la temperatura en su extremo puede considerarse prácticamente idéntica a la del aire. Suponiendo que el material de la barra tenga una conductividad k_2, hallar la pérdida total de calor en su superficie por unidad de tiempo una vez que se ha alcanzado una situación de equilibrio.

397. Una columna larga de longitud $2l$ forma parte de una construcción que le impide que se mueva horizontalmente en el medio y en la base pero la deja en libertad para girar en esos puntos. Hallar la carga máxima que puede soportar. (Cf. Problema 307).

398. Hallar la carga máxima en el problema anterior suponiendo que la columna se mantiene horizontalmente en el centro y que está fija en dirección vertical en la base.

SOLUCIONES

1. $y^2 - 1 = c(x + 2)^2$.
2. $2\sqrt{1 - y} - \sqrt{1 - x^2} = c$.
3. $\ln xy + y = c$.
4. $1 + y^2 = c(1 - x^2)$.
5. $\sec^2 x - \csc^2 y = c$.
6. $r \cos^2 \theta = c$.
7. $r^2 - \sec \theta = c$.
8. $r^2 + 2a^2 \cos^2 \theta = c$.
9. $r^2 = c \cos 2\theta$.
10. $x = a \operatorname{sen} (y + c)$.
11. $r = a \sec (\theta + c)$.
12. $x + y = c(1 - xy)$.
13. $\operatorname{sen}^2 x = c(2y + a)$.
14. $xy = c(1 - y)$.
15. $r^2 = a^2 \operatorname{sen} (2x + c)$.
16. $e^{2x} + e^{2y} = c$.
17. $\ln (ev - 1) = c - x$.
18. $y = cx^2$.
19. $y^2 = cx$.
20. $y^2 + 2x^2 = c$.
21. $y^2 - x^2 = c$.
22. Una circunferencia.
23. $xy = 4$.
24. $y^2 = 2ax = c$.
25. $y(x + 1) = 4$.
26. $y^2 - x^2 = 3$.
27. $(x - c)^2 + y^2 = k^2$, $y = \pm k$.
28. $2y^2 - x^2 = c$.
29. $xy = 1$.
30. $3y^2 + 2x^2 = 5$.
31. $r = ae^{\theta \operatorname{ctg} \alpha}$.
32. $2v_0^2 h = gx^2$, siendo el punto de partida el origen y el eje de las x horizontal.
33. $k \ln y = x + c$.
34. $r(\theta + c) + 2k = 0$.
35. $y = k$.
36. $r^2 = 4k\theta$.
37. $r = k \operatorname{sen} (\theta + c)$, $r = k$.
38. $\ln r = \dfrac{\theta + c}{\sqrt{k^2 - 1}}$.
39. $r = 2k \sec (\theta + c)$, $r = 2k$.
41. $y - y_0 = c(x - x_0)$, $y = y_0$.
42. $y^2 = cx$ o $x^2 = cy$.

43. $x^2 = cy$.
44. Una esfera o un cilindro.
45. 11,3 veces la cantidad inicial.
46. $Q = Q_0 e^{-kt}$.
47. $r = r_0 - kt$.
48. 1 hora.
49. 64.
50. 13,5 días.
51. 135000.
52. 5,13 °/₀.
53. \$ 42360.
54. \$ 23630.
55. 6,67 °/₀.
56. 75,7 Kg.
57. $4^h\ 25^m$.
58. 9,42 Kg.
59. 30,44 Kg.
60. 99,5 °/₀.
61. 461 días.
62. 38 m³.
63. 0,179 °/₀.
64. 0,125 °/₀.
65. 11,3 minutos.
66. 54,3 minutos.
67. 9,9 segundos.
69. 26,5 minutos.
70. $T = \dfrac{2}{3}x$, 691200 cal.
71. $T = 591{,}9 - 187{,}6 \ln r$, 1833000 cal.
72. 2945000 cal.
73. 0,00053.
74. $c = \dfrac{as}{r}$.
75. $I = \dfrac{2\pi\kappa E}{\ln \dfrac{r_2}{r_1}}$.
76. $Q = \dfrac{2\pi k a r_2 (T - T_0)}{k + a r_2 \ln \dfrac{r_2}{r_1}}$.
77. $T = T_0 + ce^{-ax}$, en la que c es una constante de integración y

$$a = \frac{2kar_2}{vr_1^2\left(k + ar_2 \ln \dfrac{r_2}{r_1}\right)}.$$

haciéndose todas las medidas en unidades c. g. s.

78. 65,2 minutos.
79. 7,16 Kg.
80. $kl\left(P + \dfrac{w}{2}\right)$.
81. 0,0878 veces la cantidad inicial.
82. $\ln \dfrac{P}{P_0} = 5343\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T}\right)$.

83. $x = \dfrac{ab\,(e^{akt} - e^{bkt})}{ae^{akt} - be^{bkt}}$.

84. $r = r_0 + ks$.

85. 3,3 horas.

86. 2,08 Kg.

87. $M = 197273000$.

88. $r = x + c$.

89. Hiperboloide de revolución.

90. $p = e^{-kh}$ Kg/cm².

91. $p = p_0 e^{\frac{R(R-r)}{kr}}$, en la que p_0 es la presión en la superficie de la Tierra y k es la constante en la ley de Boyle $p = k\rho$.

92. $p = p_0 + \dfrac{\rho\omega^2 a^2}{2g}$.

93. $p = p_0 e^{\frac{\omega^2 r^2}{2gk}}$, en la que p_0 es la presión en el centro.

96. $T_2 - \dfrac{wv^2}{g} = \left(T_1 - \dfrac{wv^2}{g}\right) e^{\mu\alpha}$.

97. $A = k\sqrt{h}$.

98. $A = \dfrac{P}{S} e^{\frac{wh}{S}}$ m².

100. $h^2 = kx + c$.

101. $h^2 = k \ln x + c$.

103. 0,4 Kg/cm².

104. $r = ce^{k\theta}$.

105. $r^2 = \dfrac{k}{\theta^3}$.

106. Una esfera con el foco luminoso en el centro, o la superficie engendrada haciendo girar la curva $r^2 = a \operatorname{sen} 2\theta$ alrededor de una línea que pasa por el origen.

107. 3,3 minutos.

108. 2,8 minutos.

110. La superficie engendrada haciendo girar la curva

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + c$$

alrededor del eje de las y.

111. $2xy + y^2 = c$.

112. $x^3 + 3xy^2 = c$.

113. $x^2y - y^2x = c$.

114. $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = c$.

115. $r^2 \cos^2\theta - 2r \operatorname{sen}\theta = c$.

116. $x^3y - 2y^3x = c$.

117. $x^3y + x^2 - y = c$.

118. $xe^xy^3 + e^x - 6y^3 = c$.

119. $x^2e^y + y^2e^x + x^2 = c$.

120. $x = y\,(c + \ln y)$.

121. $y = cx + x^2$.

122. $y^2 - xy = cx$.

123. $y(1 + cx) = 1$.

124. $x^3y - x^2y^2 = c$.

125. $y = x \operatorname{tg}(c - x)$.

126. $\ln x + y(x - c) = 0$.

127. $\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = c$.

128. $r^2 \cos^2\theta + r = c \cos\theta$.

129. $r^2 \sec\theta + \operatorname{tg}\theta = cr$.

130. $2xe^{x-y} + y^2 = c$.

131. $y = e^x\,(x + c)$.

132. $x^2y = x^3 + c$.

133. $x = y^2(y^2 + c)$.

134. $(x+1)^3y = (x+1)^2 + c$.

135. $y + a = c \operatorname{sen}^2 x$.

136. $x^3y = 2x^2 - x^3 + c$.

137. $x(y^2 - 1) = y^2 + 1 + cy$.

138. $(3y - x^2 + 1) \times \sqrt{x^2 - 1} = c$.

139. $(xy - 1) \operatorname{sen} x = c$.

140. $x\,(\sec y + \operatorname{tg} y) = y + c$.

141. $x^2ye^x = e^x + c$.

142. $2y - xy^2 = cx$.

143. $x^2 + xy = cy$.

144. $x^2 = y^2(2e^x + c)$.

145. $x = y\,(\ln x + c)$.

146. $4xy = y^4 + c$.

147. $y^2\left(x + \dfrac{1}{2} + ce^{2x}\right) = 1$.

148. $x = y^2(x^2 + c)$.

149. $7y^3 = x\,(y^7 + c)$.

150. $x^2 - 1 = y\,(3x + c)$.

151. $\sec y = x^2(c + \operatorname{tg} y)$.

152. $y^3 = x^3(3 \ln x + c)$.

153. $x\,(x - 3y)^2 = c$.

154. $x \ln y - y = cx$.

155. $2x^2 \ln x + 2xy - y^2 = cx^2$.

156. $y^2(y - x) = cx^2$.

157. $x^2(y - x) = c\,(y + x)$.

158. $y^4(x^2 + y^2) = cx^4$.

159. $xy^2 = c\,(x^2 + y^2)$.

160. $y^2(x - 2c) + c^2x = 0$.

161. $\ln xy + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} = c$.

162. $xy^2 = \ln x + c$.

163. $x^2y^2 - 2xy - 2 \ln x = c$.

164. $x^2y^2 - x^3 = c$.

165. $y\,(x - c) = x^3$.

166. $xy^2 + 2 \ln y = c$.

167. $1 - 2x^2y = cy^2$.

168. $x^3y^3 = ce^{xy}$.

169. $x^2y\,(1 + xy) = c$.

170. $y = cxe^{-xy}$.

171. $y^3 = x^2\,(c - \ln x)$.

172. $y = x + c, \quad y + 2x = c$.

173. $x^2 = c^2 + 2cy$.

174. $(x + c)^2 - y^2 = 1$.

175. $(xy + c)^2 = 4cx^2, \quad y = x$.

176. $2y = x^2 + c, \quad y = ce^x$.

177. $y = cx^2 + c^2$, $x^4 + 4y = 0$.

178. $y^2 = cx - c^2$, $2y = \pm x$.

179. $2y = 3x^2 + c$, $2y + x^2 = c$.

180. $y = cx - c^2$, $x^2 = 4y$.

181. $(3cx + 2)^2 = 4cy^3$, $y^3 = 6x$.

182. $2y = c - x^2$, $2 \ln y = c - x^2$.

183. $y^2 = c^2 + 2cx$.

184. $(y - cx)^2 = c^3$, $4x^3 = 27y$.

185. $cy = c^2x^2 + 1$, $y = \pm 2x$.

186. $(x - cy)^2 = 4y$, $y = 0$.

187. $x + 2y + \ln(x + y - 2) = c$.

188. $y^3 = ce^x - x - 1$.

189. $\ln x - \operatorname{sen}(xy) = c$.

190. $y^2 = x^2(2x + c)$.

191. $ey = e^x(x + c)$.

192. $x \operatorname{sen} \frac{y}{x^2} = c$.

193. $e^{\frac{x}{y}} + \ln x = c$.

194. $xy = e^x(x + c)$.

195. $e^{\frac{x}{y^2}} + \ln y = c$.

196. $x^2 \operatorname{sen} y = x^3 + c$.

197. $x = \frac{1}{2}e^t + c_1e^{-t}$, $y = \frac{1}{2}e^t - c_1e^{-t} + c_2$.

198. $y = c_1e^{3t}$, $x = c_2e^t - \frac{1}{2}c_1e^{3t}$.

199. $x^2 = c_1t - t^2$, $y = t^3 - \frac{1}{2}c_1t^2 + c_2$.

200. $x = \frac{1}{t + c_1t^2}$, $y = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}c_1t^4 + c_2$.

201. $x = t + \frac{c_1}{t^2}$, $y = t^4 + t^2 + 4c_1t + c_2$.

202. $y = e^t(t + c_1)$, $x = 2e^t(t + c_1 - 1) + c_2$.

203. $x = -\frac{2c_1}{t} + c_2$, $y = \frac{3t^2}{c_1 - t^3}$.

204. $x = c_1e^t$, $y = \frac{1}{2}c_1e^t + c_2e^{-t}$.

205. $\ln x = cy$.

206. $x^3 = 3xy + c$.

207. $x = cey + y + 1$.

208. $x^2 + c^2 = 2cy$.

209. $x^2 + xy - y^2 = c$.

210. $xy = cx^3 - 1$.

211. $y = cx^2e^{-\frac{3}{x}}$.

212. $x^2 - y^2 = cx$.

213. $y(x - 1) = x^3 + cx$

214. $y = x^2 + cxe^{-x}$.

215. $y = \frac{1}{2}x(e^{x+c} - e^{-x-c})$.

216. $xy^2 = c(x + 2y)$.

217. $y(x^2 + c^2) = 4cx^2$.

218. $x^4 + 4y(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}} = c$.

219. $x \operatorname{ctg} y = \cos y + c$.

220. $x^2y = 2 \ln y + c$.

221. $xy = x + 1 + c\sqrt{x + 1}$.

222. $x^2y - x = cy$.

223. $x = y^2(c - e^{-y})$.

224. $y \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x^3 = c$.

225. $3y^2 = 2 \operatorname{sen} x + c \csc^2 x$.

226. $2ey = e^x + ce^{-x}$.

227. $y = ce^x$, $x = 2y^2(1 + cx)$.

228. $(a^2 - x^2)c^2 + 2cxy + b^2 - y^2 = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

229. $y = \frac{c_1t^2}{2} - \frac{1}{2c_1}$, $x = \frac{1}{2c_1} - \frac{c_1t^2}{6} + \frac{c_2}{t}$.

230. $x = c_1e^t + t + 1$, $y = c_2 - c_1e^t - t^2$.

231. $i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\left[R \operatorname{sen} \omega t - L\omega \cos \omega t + L\omega e^{-\frac{Rt}{L}}\right]$.

232. $i = \frac{CE\omega}{1 + C^2R^2\omega^2}\left[\cos \omega t + CR\omega \operatorname{sen} \omega t - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$.

233. $i_1 = \frac{I}{R^2 + L^2\omega^2}\left[(RR_2 + LL_2\omega^2) \operatorname{sen} \omega t + \omega(L_2R - R_2L)\left(\cos \omega t - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)\right]$, en la que $R = R_1 + R_2$, $L = L_1 + L_2$.

234. $T = T_0 + \frac{0{,}239RI^2}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{C}}\right)$, si $T = T_0$ en el tiempo $t = 0$.

235. $y^2 = 2cx + c^2$, siendo el punto fijo el origen y la línea fija paralela al eje de las x.

236. $x^2 + y^2 = 2cx$.

237. $x^3 + 3xy^2 = c$.

238. $x = y + 1 + cey$.

240. $x^2 + y^2 = cx$.

241. $x^2 = 2cy + c^2$.

242. Una catenaria.

244. $2xy = a^2$.

245. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

246. La superficie es engendrada haciendo girar una catenaria

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x+c}{a}} + e^{-\frac{x+c}{a}}\right)$$

alrededor del eje de las x.

247. 6,76 Kg.

248. $x = \frac{1}{4}(1 - 2^{-t})$, $y = \frac{3}{4}(1 - 2^{-t})$.

249. $y = 4{,}5(1 - e^{-0{,}7324t})$, $x = 10 - y$.

250. $B = 0{,}214$, $C = 0{,}249$.

252. $y = \operatorname{sen} x + c_1 x + c$.

253. $y = x \ln x + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$.

254. $y = c_1 \ln x + c_2 - \frac{1}{4}x^2$.

255. $y = (1 + c_1^2)\ln(x + c_1) - c_1 x + c_2$.

256. $y = x + c_1 x e^x + c_2$.

257. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

258. $y = c_1 \operatorname{sen}(kx + c_2)$.

259. $y = \frac{1}{2c_1}(e^{c_1 x + c_2} + e^{-c_1 x - c_2})$.

260. $x = \frac{1}{c_1}\ln\frac{c_1 + y}{c_1 - y} + c_2$.

263. $y = \frac{1}{b}\ln(c_1 + c_2 x^{a+1})$.

261. $y = \frac{1}{a}\ln(c_1 + \ln x) + c_2$.

264. $x = c_1 \ln y - \frac{1}{4}y^2 + c_2$.

262. $y = \frac{1}{a}\ln(c_1 + x^2) + c_2$.

265. $y = x + c_1(x\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc\,sen} x) + c_2$.

266. $y = c_1 x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{c_2}{x}$.

267. $y = \frac{1}{6}x \ln(1 + x^2) + c_1(1 + x \operatorname{arc\,tg} x) + c_2 x$.

268. $y = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c_1 \ln x + c_2$.

269. $y = \frac{c_1 x(c_2 x^{2c_1} - 1)}{c_2 x^{2c_1} + 1}$.

270. $\ln x = \frac{2}{c_1}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+1}{c_1} + c_2$.

271. $EI\,y = \frac{1}{12}W(3lx^2 - x^3)$, siendo el centro el origen.

272. $EI\,y = \frac{1}{6}W(x^3 - 3lx^2)$, siendo el origen el extremo fijo.

273. $EI\,y = -\frac{1}{24}w(6l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)$, siendo el origen el extremo fijo.

274. $EI\,y = \frac{1}{48}w(-3l^2x^2 + 5lx^3 - 2x^4)$, siendo el origen el centro.

275. $EI\,y = \frac{1}{48}w(-3l^2x^2 + 5lx^3 - 2x^4)$, siendo el origen el extremo fijo.

276. $EI\,y = \frac{1}{24}w(2l^2x^2 - x^4)$, siendo el origen el centro.

277. Una parábola.

278. Una catenaria.

279. 30,2 Kg.

280. $y = c(e^{kx} + e^{-kx})$, estando los extremos inferiores de las barras sobre el eje de las x y el punto más bajo de la curva sobre el eje de las y.

281. $x = a\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$.

284. Unos 11 Kg/seg.

285. Unos $42\frac{1}{2}$ minutos.

283. $t = \frac{a^2}{k}$.

286. $s = \frac{V^2}{g}\ln\left(\frac{e^{\frac{gt}{V}} + e^{-\frac{gt}{V}}}{2}\right)$, en la que s es la distancia recorrida al caer.

287. $v_0\sqrt{\frac{mg}{mg + kv_0^2}}$.

288. Altura máxima 14,550 m, alcance 59,05 Km.

289. $x = \frac{mv_0\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$,

$$y = \frac{m}{k^2}(kv_0 \operatorname{sen}\alpha + mg)\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \frac{mgt}{k}.$$

290. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{ky^2}{mv_0^2} = 1.$

291. $r = a \cos \theta.$

293. $t = \sqrt{\frac{6}{g}} \ln (6 + \sqrt{35}).$

294. 3,45 m/seg.

295. $t = \frac{3}{\sqrt{g}} \ln (17+12\sqrt{2}).$

296. $(l + x)^2v^2 = \frac{2}{3}g[(l + x)^3 - l^3]$, en la que v es la velocidad.

297. $s = c\left[t + \frac{m_0 - kt}{k} \ln \frac{m_0 - kt}{m_0}\right] - \frac{1}{2}gt^2.$

298. $s = \frac{1}{2}gt^2 - c\left[t + \frac{m_0 - kt}{k} \ln \frac{m_0 - kt}{m_0}\right].$

299. $s = \frac{m_0v_0}{k} \ln \frac{m_0}{m_0 - kt}.$

300. $s = \frac{1}{8}gt^2.$

302. $\frac{1}{7}g.$

303. Un círculo.

304. Una catenaria.

305. $2x = c_1 \ln y - \frac{y^2}{2c_1} + c_2.$

306. $EIy = \frac{1}{2}Wlx^2, \quad EIy = \frac{1}{6}W(l^3 - 3l^2x + 6lx^2 - x^2).$

308. $P = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI.$

311. $r = a \sec\left[\theta\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}\right].$

312. $\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{k}{r_0^2v_0^2}\right)\cos\theta + \frac{k}{r_0^2v_0^2}.$

313. $r = \frac{2r_0}{1 + \cos\theta}.$

315. $v = \frac{16c}{15}\left[1 - \left(\frac{W_0 - wt}{W_0}\right)^{15}\right].$

316. $T = \frac{a\rho I^2}{2kA^2}(lx - x^2) + \frac{x}{l}(T_1 - T_0) + T_0, \quad A = Il\sqrt{\frac{a\rho}{2k(T_1 - T_0)}},$

en la que $a = 0{,}239$, estando expresada la temperatura en grados centígrados y el calor transmitido en calorías por segundo.

317. $y = c_1 + c_2e^{-x}.$

318. $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}.$

319. $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}.$

320. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x}.$

321. $y = c_1 + c_2e^{-x} + c_3e^{3x}.$

322. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{-2x}.$

323. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$

324. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x.$

325. $y = (c_1 + c_2x) \cos x + (c_3 + c_4$ [illegible] $x.$

326. $y = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x).$

327. $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$

328. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x.$

329. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x.$

330. $y = c_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3x}\right) + c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3x}\right)\right].$

331. $y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x)e^x.$

332. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{3}e^x.$

333. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - x.$

334. $y = (c_1 + c_2x)e^x + 2e^{2x}.$

335. $y = (c_1 + c_2x)e^x + (c_3 + c_4x)e^{-x} + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x.$

336. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\cos x.$

337. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{5x} - x + \frac{4}{5}.$

338. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{2}\cos x + \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}.$

339. $y = c_1 + c_2e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x.$

340. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x \cos x.$

341. $y = c_1 + c_2e^{-2x} + xe^x - \frac{4}{3}e^x.$

342. $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} - \frac{1}{2}x^2 - x.$

343. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x - \frac{1}{8}\cos x.$

344. $y = c_1 + (c_2 + c_3x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x - \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

345. $y = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{3}{5}e^{2x}\operatorname{sen} x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x$.

346. $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x + \frac{1}{4}e^{2x}$.

347. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x) + e^{2x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

348. $y = (c_1 + c_2x + x^2)e^{-2x}$.

349. $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\operatorname{sen} x - x^5 - 119x$.

350. $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{1}{24}x^4)e^{-x}$.

351. $y = \frac{1}{4}x^2e^{-x}(2\ln x - 3) + (c_1 + c_2x)e^{-x}$.

352. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + e^{2x}\int[e^{-x}\int e^{-x}\ln x\,dx]dx$.

353. $y = (x + c_1)\operatorname{sen} x + (\ln\cos x + c_2)\cos x$.

354. $y = c_1 + (c_2 + \frac{1}{2}x)e^x + (c_3 + \frac{1}{2}x)e^{-x}$.

355. $y = e^x[c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\ln(\csc x - \operatorname{ctg} x)]$.

356. $y = c_1x^{\frac{3}{2}} + c_2x^{-\frac{1}{2}} - x$.

357. $y = c_1x + \frac{c_2}{x}$.

358. $y = c_1x^2 + \frac{c_2}{x} - x$.

359. $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2$.

360. $y = x[c_1 + c_2\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2]$.

361. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} - 1$, $x = c_1e^t - c_2e^{-t} - 1$.

362. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t$, $x = (c_1 + c_2)\cos t + (c_2 - c_1)\operatorname{sen} t$.

363. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\operatorname{sen} t$,
$x = c_1e^t + c_2e^{-t} - c_3\cos t - c_4\operatorname{sen} t$.

364. $y = e^t$, $x = c - 2e^t$.

365. $y = -t$, $x = t^2 + t - 1$.

366. $x = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t$,
$y = 2c_1e^t + (c_2 + c_3)\operatorname{sen} t + (c_2 - c_3)\cos t$.

367. $y = (c_1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln t)t + \frac{c_2}{t}$, $x = 1 - (c_1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln t)t + \frac{c_2}{t}$.

368. $T = 20$.

369. $T = \frac{2\pi}{15}$. La amplitud disminuye a $\frac{1}{2}$ en 0,6931 segundos.

370. $\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}0924\frac{dx}{dt} + 88{,}83x = 0$.

371. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

372. $k = 2\pi^2n^2Ma^2$.

373. $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{5}{3g}}$.

374. $m = \frac{b^2}{4c}$.

375. $T = 2{,}24$ seg.

376. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3g}}$.

377. $H = \frac{\pi^2n^2ml}{3M}$.

378. $T = \pi\sqrt{\frac{\pi}{g}}$.

379. $T = \frac{2\pi l}{\sqrt{3ag}}$.

380. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$.

381. $T = (4 + 2\pi)\sqrt{\frac{m}{P}}$.

383. $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

384. $x = a\cos kt$, $y = b\cos kt$.

385. $x = c\cos\left(t\sqrt{\frac{2}{m}}\right)$, estando el origen a mitad de distancia entre los dos centros de atracción.

386. El punto describe una elipse.

387. Una línea recta.

388. $r = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$.

390. $I = \frac{1}{2}\left(I_0 + E_0\sqrt{\frac{g}{r}}\right)e^{l\sqrt{rg}} + \frac{1}{2}\left(I_0 - E_0\sqrt{\frac{g}{r}}\right)e^{-l\sqrt{rg}}$.

391. Una parábola.

392. $l\left(\frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta} - 1\right)$, en la que $\theta = \omega\sqrt{kml}$.

393. $y = e^{\alpha x}(A\cos ax + B\operatorname{sen} ax) + e^{-\alpha x}(C\cos ax + D\operatorname{sen} ax)$, siendo $a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$, y determinándose las constantes A, B, C y D por las condiciones satisfechas en el centro y en el extremo.

394. Un círculo.

395. Una hélice.

396. $\pi r^{\frac{3}{2}}\sqrt{2k_1k_2}(T_1 - T_0)$.

397. $P = 1{,}358\left(\frac{EI}{l^2}\right)$.

398. $P = 1{,}566\left(\frac{EI}{l^2}\right)$.

LOGARITMOS NATURALES

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.....	0.0000	0.6931	1.0986	1.3863	1.6094	1.7918	1.9459	2.0794	2.1972
1	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	2.6391	2.7081	2.7726	2.8332	2.8904	2.9444
2	9957	3.0445	3.0910	3.1355	3.1781	3.2189	3.2581	3.2958	3.3322	3.3673
3	3.4012	4340	4657	4965	5264	5553	5835	6109	6376	6636
4	6889	7136	7377	7612	7842	8067	8286	8501	8712	8918
5	9120	9318	9512	9703	9890	4.0073	4.0254	4.0431	4.0604	4.0775
6	4.0943	4.1109	4.1271	4.1431	4.1589	1744	1897	2047	2195	2341
7	2485	2627	2767	2905	3041	3175	3307	3438	3567	3694
8	3820	3944	4067	4188	4308	4427	4543	4659	4773	4886
9	4998	5109	5218	5326	5433	5539	5643	5747	5850	5951
10	6052	6151	6250	6347	6444	6540	6634	6728	6821	6913
11	7005	7095	7185	7274	7362	7449	7536	7622	7707	7791
12	7875	7958	8040	8122	8203	8283	8363	8442	8520	8598
13	8675	8752	8828	8903	8978	9053	9127	9200	9273	9345
14	9416	9488	9558	9628	9698	9767	9836	9904	9972	5.0039
15	5.0106	5.0173	5.0239	5.0304	5.0370	5.0434	5.0499	5.0562	5.0626	0689
16	0752	0814	0876	0938	0999	1059	1120	1180	1240	1299
17	1358	1417	1475	1533	1591	1648	1705	1761	1818	1874
18	1930	1985	2040	2095	2149	2204	2257	2311	2364	2417
19	2470	2523	2575	2627	2679	2730	2781	2832	2883	2933
20	2983	3033	3083	3132	3181	3230	3279	3327	3375	3423
21	3471	3519	3566	3613	3660	3706	3753	3799	3845	3891
22	3936	3982	4027	4072	4116	4161	4205	4250	4293	4337
23	4381	4424	4467	4510	4553	4596	4638	4681	4723	4765
24	4806	4848	4889	4931	4972	5013	5053	5094	5134	5175
25	5215	5255	5294	5334	5373	5413	5452	5491	5530	5568
26	5607	5645	5683	5722	5759	5797	5835	5872	5910	5947
27	5984	6021	6058	6095	6131	6168	6204	6240	6276	6312
28	6348	6384	6419	6454	6490	6525	6560	6595	6630	6664
29	6699	6733	6768	6802	6836	6870	6904	6937	6971	7004
30	7038	7071	7104	7137	7170	7203	7236	7268	7301	7333
31	7366	7398	7430	7462	7494	7526	7557	7589	7621	7652
32	7683	7714	7746	7777	7807	7838	7869	7900	7930	7961
33	7991	8021	8051	8081	8111	8141	8171	8201	8230	8260
34	8289	8319	8348	8377	8406	8435	8464	8493	8522	8551
35	8579	8608	8636	8665	8693	8721	8749	8777	8805	8833
36	8861	8889	8916	8944	8972	8999	9026	9054	9081	9108
37	9135	9162	9189	9216	9243	9269	9296	9322	9349	9375
38	9402	9428	9454	9480	9506	9532	9558	9584	9610	9636
39	9661	9687	9713	9738	9764	9789	9814	9839	9865	9890
40	9915	9940	9965	9989	6.0014	6.0039	6.0064	6.0088	6.0113	6.0137
41	6.0162	6.0186	6.0210	6.0234	0259	0283	0307	0331	0355	0379
42	0403	0426	450	0474	0497	0521	0544	0568	0591	0615
43	0638	0661	0684	0707	0730	0753	0776	0799	0822	0845
44	0868	0890	0913	0936	0958	0981	1003	1026	1048	1070
45	1092	1115	1137	1159	1181	1203	1225	1247	1269	1291
46	1312	1334	1356	1377	1399	1420	1442	1463	1485	1506
47	1527	1549	1570	1591	1612	1633	1654	1675	1696	1717
48	1738	1759	1779	1800	1821	1841	1862	1883	1903	1924
49	1944	1964	1985	2005	2025	2046	2066	2086	2106	2126
50	2146	2166	2186	2206	2226	2246	2265	2285	2305	2324
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6.2146	6.2166	6.2186	6.2206	6.2226	6.2246	6.2265	6.2285	6.2305	6.2324
51	2344	2364	2383	2403	2422	2442	2461	2480	2500	2519
52	2538	2558	2577	2596	2615	2634	2653	2672	2691	2710
53	2729	2748	2766	2785	2804	2823	2841	2860	2879	2897
54	2916	2934	2953	2971	2989	3008	3026	3044	3063	3081
55	3099	3117	3135	3154	3172	3190	3208	3226	3244	3261
56	3279	3297	3315	3333	3351	3368	3386	3404	3421	3439
57	3456	3474	3491	3509	3526	3544	3561	3578	3596	3613
58	3630	3648	3665	3682	3699	3716	3733	3750	3767	3784
59	3801	3818	3835	3852	3869	3886	3902	3919	3936	3953
60	3969	3986	4003	4019	4036	4052	4069	4085	4102	4118
61	4135	4151	4167	4184	4200	4216	4232	4249	4265	4281
62	4297	4313	4329	4345	4362	4378	4394	4409	4425	4441
63	4457	4473	4489	4505	4520	4536	4552	4568	4583	4599
64	4615	4630	4646	4661	4677	4693	4708	4723	4739	4754
65	4770	4785	4800	4815	4831	4846	4862	4877	4892	4907
66	4922	4938	4953	4968	4983	4998	5013	5028	5043	5058
67	5073	5088	5103	5117	5132	5147	5162	5177	5191	5206
68	5221	5236	5250	5265	5280	5294	5309	5323	5338	5352
69	5367	5381	5396	5410	5425	5439	5453	5468	5482	5497
70	5511	5525	5539	5554	5568	5582	5596	5610	5624	5639
71	5653	5667	5681	5695	5709	5723	5737	5751	5765	5779
72	5793	5806	5820	5834	5848	5862	5876	5889	5903	5917
73	5930	5944	5958	5971	5985	5999	6012	6026	6039	6053
74	6067	6080	6093	6107	6120	6134	6147	6161	6174	6187
75	6201	6214	6227	6241	6254	6267	6280	6294	6307	6320
76	6333	6346	6359	6373	6386	6399	6412	6425	6438	6451
77	6464	6477	6490	6503	6516	6529	6542	6554	6567	6580
78	6593	6606	6619	6631	6644	6657	6670	6682	6695	6708
79	6720	6733	6746	6758	6771	6783	6796	6809	6821	6834
80	6846	6859	6871	6884	6896	6908	6921	6933	6946	6958
81	6970	6983	6995	7007	7020	7032	7044	7056	7069	7081
82	7093	7105	7117	7130	7142	7154	7166	7178	7190	7202
83	7214	7226	7238	7250	7262	7274	7286	7298	7310	7322
84	7334	7346	7358	7370	7382	7393	7405	7417	7429	7441
85	7452	7464	7476	7488	7499	7511	7523	7534	7546	7558
86	7569	7581	7593	7604	7616	7627	7639	7650	7662	7673
87	7685	7696	7708	7719	7731	7742	7754	7765	7776	7788
88	7799	7811	7822	7833	7845	7856	7867	7878	7890	7901
89	7912	7923	7935	7946	7957	7968	7979	7991	8002	8013
90	8024	8035	8046	8057	8068	8079	8090	8101	8112	8123
91	8134	8145	8156	8167	8178	8189	8200	8211	8222	8232
92	8244	8255	8265	8276	8287	8298	8309	8320	8330	8341
93	8352	8363	8373	8384	8395	8405	8416	8427	8437	8448
94	8459	8469	8480	8491	8501	8512	8522	8533	8544	8554
95	8565	8575	8586	8596	8607	8617	8628	8638	8648	8659
96	8669	8680	8690	8701	8711	8721	8732	8742	8752	8763
97	8773	8783	8794	8804	8814	8824	8835	8845	8855	8865
98	8876	8886	8896	8906	8916	8926	8937	8947	8957	8967
99	8977	8987	8997	9007	9017	9027	9037	9048	9058	9068
100	9078	9088	9098	9108	9117	9127	9137	9147	9157	9167
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

INDICE ALFABETICO

Los números corresponden a las páginas

A

Aceleración,
angular, 146.
de la gravedad, 102.
en coordenadas polares, 106.
lineal, 102.
Alargamiento de una cuerda elástica, 35.
Amplitud de una oscilación, 148.
Atmósfera, altura de la, 40.
Azufre, problema sobre disolución del, 34.

B

Bacterias, problema sobre, 82.

C

Calorías producidas por una corriente eléctrica, 33.
Cambio de moneda, problema sobre, 27.
Cambio de variable, 75.
Cantidad de calor que fluye a través de una esfera, 31.
Carga eléctrica, problema sobre, 24.
Catenaria, 18.
Clairaut, ecuación de, 81.
Clepsidra, 42.
Coeficientes indeterminados, 131.
Cohete, movimiento de un, 114.
Columnas, problemas sobre, 116.
Cometas, problema sobre, 117.
Concentración, cálculo de la, 25.
problemas sobre, 26, 33.
Condensadores, problemas sobre, 19, 44.
Conductibilidad, 29.
problemas sobre, 32.
Constantes,
independientes, 85.
su determinación, 13.
Cuerda elástica, 35.
Curva envolvente, 73.
Curvas integrales, 4.
ecuaciones paramétricas, 68.
Curvas ortogonales, problemas sobre, 81.
Curvas, problemas sobre, 15.

D

Densidad del aire, 40.
Densidades, problemas sobre, 42, 43.
Desarrollo en serie de cos θ, 126.
de e^x, 125.
de sen θ, 126.
Descomposición del radio, 23.
Determinación de constantes, 13.
Difusión, 29
Dimensión, 64.
Dimensiones, 91.
Dinámica de un sistema de puntos, 111.
Disolución, velocidad de, 34.

E

Ecuación,
característica, 121.
de Clairaut, 70, 81.
de continuidad, 25.
de la catenaria, 18.
Ecuaciones,
con el segundo miembro igual a cero. 122.
con variables separables, 4.

Ecuaciones,
cuyo segundo miembro es una función de x, 128.
de grado superior, 67.
de orden n, 119.
de primer orden, 1, 46.
de segundo grado, 67.
de segundo orden, 84.
inmediatamente integrables, 85.
diferenciales exactas, 46.
entre derivadas parciales, 1
homogéneas, 60, 91.
de primer grado, 142.
lineales, 52, 120.
con coeficientes constantes, 119.
homogéneas, 142.
de segundo orden, 89.
ordinarias, 1.
paramétricas, 68.
que contienen integrales, 16.
que no contienen x, 87.
que no contienen y, 86.
reducibles a homogéneas, 64.
reducibles a lineales, 57.
simultáneas, 77.
Electricidad, problemas sobre, 80.
Electrones, problemas sobre, 154.
Enfriamiento, problema sobre, 24.
Elipse ortogonal, 13.
Equilibrio de un cable, 98.
Espejo,
elíptico, 38.
hiperbólico, 41.
parabólico, 41.
Euler, fórmulas de, 125.
Expresión homogénea, 60.

F

Factor integrante, 50.
Factores de integración, 50.
Fermentos, problema sobre, 24.
Flecha de una viga, 116.
Flechas de las vigas, 94.
Flujo, de electricidad, 29.
de calor, 29.
problemas sobre, 32.
Fórmulas de Euler, 125.
Función complementaria, 129.
Función homogénea, 61.

G

Gota de agua, problemas sobre movimiento de una, 116, 117.
Grado, de una ecuación, 67.
de una expresión, 60.
de un producto, 60.
Gravedad, aceleración de la, 102.

I

Iluminación, intensidad de, 44.
problemas sobre, 36, 44.
Integración entre límites, 22.
Integral, de una ecuación, 2.
general, 4, 85.
diferentes formas de la, 6.
particular, 129.
Integrales singulares, 73.
Interés compuesto, 21.
continuo, 24.
Interpretación geométrica, 72.

L

Logaritmo, natural, 7.
Logaritmos, propiedades de los, 7.

M

Método de los coeficientes indeterminados, 131.
Método de variación de constantes, 140.
Métodos simbólicos, 137.
Momento, 96, 147.
flexor, 96.
Movimiento,
de una gota de agua, 116, 117.
en un plano, 104.
sobre una recta, 101.
Movimiento de cadenas,
problemas sobre, 115.
Movimiento de líquidos, problemas sobre, 32.
Movimiento de una cadena, 112.
Movimiento de un cohete, 114.
Movimiento de un líquido, problemas sobre, 24.
Movimiento de un punto, 151

Movimiento de un sistema con masa variable, 113.
Movimiento oscilatorio, 149.
Movimientos vibratorios, 147.

N

Newton, ley de, 24, 41.

O

Operador simbólico, 120, 122, 137.
Orbitas, problemas sobre, 117.
Orden de una ecuación, 2.

P

Par, 147.
Péndulo, 149.
problemas sobre el, 151.
Período de oscilación de un péndulo, 149.
Período de vibración 148.
Pivote Schiele, 45.
Planeta, órbita de un, 117.
Población, problemas sobre aumento de, 24, 37.
Poleas, problemas sobre, 42.
Presión, problemas sobre, 41.
Problema bancario, 27.
Problemas,
de segundo grado, 33.
de Química, 24, 27, 34, 36, 37, 82.
físicos, 20, 24, 32, 37, 44, 80, 115, 154.
geométricos, 9, 15, 81.
sobre ecuaciones de curvas, 10, 14, 15, 19, 81.
sobre electricidad, 80.

Q

Quicioneras, problemas sobre, 44.
Química, problemas de, 24, 27, 34, 37, 82.

R

Radio, descomposición del, 23.
Radio de una gota de líquido, problema sobre, 24.
Radio de una gota de lluvia, problema sobre, 37.
Radioactivas, transformación de sustancias, 82.
Raíces imaginarias, 125.
Reflector, problema sobre forma de un, 80.
Relaciones diferenciales, 38.
Rotación alrededor de un eje fijo, 146.

S

Salida de agua por un orificio, 28.
Schiele, pivote, 45.
Símbolo operatorio, 137.
Sistemas de ecuaciones lineales, 143.
Soluciones, interpretación geométrica, 72.
Soluciones de una ecuación, 2.

T

Temperatura de un alambre, problema sobre, 118.
Tensiones en una cuerda, 42.
Tipos especiales de ecuaciones de segundo orden, 84.
Transformación de sustancias radioactivas, 82.
Trayectorias ortogonales, 12.
problemas sobre, 15.

V

Variación de constantes, 140.
Velocidad,
angular, 146.
de disolución, 34.
de variación, 21.
Ventilación, problemas sobre, 27.
Vibración amortiguada, 149.
Viga,
flecha de una, 116.
voladiza, problemas sobre, 101.
Vigas, flecha de las, 94.